Schwerpunkt Mathematische Statistik
und Stochastische Prozesse

Prof.Dr.G.Neuhaus

SS 2002
Übungen zur Vorlesung
Mathematische Statistik
Blatt 4
Abgabe am Dienstag, den 30.04.2002,
zu Beginn der Übungsstunde

K-Aufgabe 13. (4 Punkte) Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Man berechne erneut die charakteristische Funktion (CF) $\phi(t) = E\exp(itX)$, indem man die Gleichung $\phi'(t) = -t\phi(t)$ herleitet.

K-Aufgabe 14. (2P) Seien $X_1, \ldots,$ i.i.d mit $EX_i = 0$. Man zeige mit Hilfe charakteristischer Funktionen, dass $\bar{X}_n$ für $n \to \infty$ n.W. gegen 0 konvergiert, also erneut das WLLN (sogar ohne Voraussetzung endlicher Varianz).
Hinweis: Man gehe genauso vor wie beim Beweis von V 4.4 Satz, nur entwickle man bis zum linearen Glied. Die Limes-CF ist hier $\exp(0) = 1$.

K-Aufgabe 15. (4P) (Inversionsformel für charakteristische Funktionen) Sei X eine reelle ZV mit CF (char.Fktn.) φ^X, mit $\rho := \int |\varphi^X| \, d\lambda < \infty$. Man zeige, dass dann die VF F von X eine stetige, beschränkte Dichte f besitzt, nämlich

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi^X(t) e^{-itx} \lambda(dt).$$

Hinweis: Nach dem Beweis des Eindeutigkeitssatzes für CFen gilt mit $W \sim \mathcal{N}(0,1)$, $f^Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E e^{iyW}$

$$f^{X+\sigma Y}(u) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi^X(v) e^{-iuv - \frac{1}{2}v^2\sigma^2} \lambda(dv).$$

Man zeige dann, dass $f(u) := \lim_{\sigma \to 0} f^{X+\sigma Y}(u)$ die gesuchte Dichte ist, indem man in

$$P^{X+\sigma Y}(a,b] = \int_{(a,b]} f^{X+\sigma Y} \, d\lambda$$

σ gegen 0 gehen lässt.

K-Aufgabe 16. a) (2P) Man zeige, dass $\phi(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, die CF der Doppelexponential-Verteilung mit Dichte $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, ist
b) (1P) Unter Beachtung, dass ϕ bis auf einen Vorfaktor $\frac{1}{\pi}$ die Dichte der Cauchy(0,1)-Verteilung ist, berechne man mit Hilfe der Inversionsformel die charakteristische Funktion der Cauchy(0,1)-Verteilung.
c) (1P) Man berechne für $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $X_i \sim$ Cauchy(0,1), die CF von $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Ziehen Sie daraus Schlüsse zur Gültigkeit des Gesetzes der großen Zahlen und des zentralen Grenzwertsatzes.