K - Aufg. 11 a)

$$\Omega = \{ \overbrace{(k_1, \ldots, k_n)}^{\omega} : k_i \in \mathbb{N} \ \forall i , \ k_i \neq k_j \ \forall i \neq j \}$$

$\vartheta \in \mathbb{N}$, $\vartheta \geq n$

$\uparrow$
Parameter

P_ϑ = Laplace Experiment über $\Omega_\vartheta \subset \Omega$ mit

$$\Omega_\vartheta = \{ \omega \in \Omega : \ k_i \leq \vartheta \ \forall i \}$$

$$P_\vartheta\{(k_1, \ldots, k_n)\} = \begin{cases} \dfrac{1}{\vartheta(\vartheta-1) \cdots (\vartheta-n+1)} & , \text{falls } \max\limits_{1 \leq i \leq n} k_i \leq \vartheta \\ 0 & , \text{falls } \max\limits_{1 \leq i \leq n} k_i > \vartheta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(k_1, \ldots, k_n) = \max_{1 \leq i \leq n} k_i$$

K-Aufg. 11 b) $\qquad (x \le \vartheta)$

$$P_\vartheta\{X \le x\} = P_\vartheta\{(k_1,\dots,k_n) \in \Omega_\vartheta : \ k_i \le x \ \ \forall i\}$$

$$= \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{\vartheta(\vartheta-1)\cdots(\vartheta-n+1)} = \frac{x!}{(x-n)!}\cdot\frac{(\vartheta-n)!}{\vartheta!} = \frac{\binom{x}{n}}{\binom{\vartheta}{n}}$$

$\Rightarrow$

$$P_\vartheta\{X = x\} = P_\vartheta\{X \le x\} - P_\vartheta\{X \le x-1\} \qquad \text{für } x > n$$

Nun ist für $x > n$

$$\frac{x!}{(x-n)!} - \frac{(x-1)!}{((x-1)-n)!} = (x-1)!\left(\frac{x}{(x-n)!} - \frac{1}{(x-1-n)!}\right)$$

$$= (x-1)!\left(\frac{x-(x-n)}{(x-n)!}\right) = n\cdot\frac{(x-1)!}{(x-n)!} \ ;$$

also

$$(*) \quad P_\vartheta\{X = x\} = \frac{(\vartheta-n)!}{\vartheta!}\cdot\frac{(x-1)!}{(x-n)!}\,n = \frac{\binom{x-1}{n-1}}{\binom{\vartheta}{n}} \qquad \text{für } x > n.$$

Für $x = n$ gilt $P_\vartheta\{X = x\} = P_\vartheta\{X \le x\} = 1/\binom{\vartheta}{n}$ ebenfalls, sodass $(*)$ für $n \le x \le \vartheta$ gilt.

$$E_\vartheta X = \sum_{x=n}^{\vartheta} x\,\frac{\binom{x-1}{n-1}}{\binom{\vartheta}{n}} . \qquad \text{Wegen } x\binom{x-1}{n-1} = n\binom{x}{n}$$

und $(**)$ $\displaystyle\sum_{x=n}^{\vartheta}\frac{\binom{x-1}{n-1}}{\binom{\vartheta}{n}} = 1$ ergibt sich

$$E_\vartheta X = n\,\frac{1}{\binom{\vartheta}{n}}\sum_{x=n}^{\vartheta}\binom{x}{n} = n\,\frac{1}{\binom{\vartheta}{n}}\underbrace{\sum_{x=n+1}^{\vartheta+1}\binom{x-1}{(n+1)-1}}_{(**)\ \binom{\vartheta+1}{n+1}}$$

$$= n\,\frac{n!\,\cancel{(\vartheta-n)!}}{\vartheta!}\;\frac{(\vartheta+1)!}{(n+1)!\,\cancel{(\vartheta-n)!}} = \frac{n}{n+1}(\vartheta+1) \qquad \square$$

Lösung K-Aufgabe 12

$\Omega = \{1, \dots, n\}^2$. $X(\omega) = \omega_1$, $Y(\omega) = \omega_2$ für $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$.

a) $Z := X + Y$

$$P\{Z = k\} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{P\{X+Y=k, X=i\}}_{P\{Y=k-i, X=i\} = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & , 1 \le k-i \le n \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}}$$

$$= \frac{1}{n^2} \# \{i : 1 \le i \le n, i < k, k-n \le i\} \quad , k = 2, \dots, 2n,$$

$$= \begin{cases} \frac{k-1}{n^2} & , 2 \le k \le n+1 \quad (\Leftrightarrow 2-n \le k-n \le 1 \text{ also } k-n \le i) \\ \frac{2n-k+1}{n^2} & , n+1 < k \le 2n \quad (\Leftrightarrow k-n > 1, k-n \le n) \end{cases}$$

b) $P\{|X-Y| = k\}$ $\qquad k = 0, 1, \dots, n-1$

$$= \sum_{i=1}^{n} P\{|X-Y| = k, X = i\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{P\{Y = k+i, X=i\}}_{(1)} + \underbrace{P\{Y = i-k, X = i\}}_{(2) \text{ falls } k>0 \text{ sonst nur } (1)}$$

$$(1) = \frac{1}{n^2} \# \{i : 1 \le i \le n, k+i \le n\} = \frac{n-k}{n^2}$$

$$(2) = \frac{1}{n^2} \# \{i : 1 \le i \le n, 1+k \le i\} = \frac{n-k}{n^2}$$

$$\Rightarrow P\{|X-Y| = k\} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } k = 0 \\ \frac{2(n-k)}{n^2} & \text{für } k = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

c) $P\{\max(X,Y)=k\}$, $k=1,\dots,n$

$$= \sum_{i=1}^{n} P\{\max(i,Y)=k,\ X=i\}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P\{\underset{k}{Y}>i,\ Y=k,\ X=i\} + P\{Y\le i,\ i=k,\ X=i\}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k-1} P\{Y=k,\ X=i\}\right)}_{=\ \frac{1}{n^2}(k-1)} + \underbrace{P\{Y\le k,\ X=k\}}_{\frac{k}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{n^2}(2k-1) .$$

Lösung K-Aufgabe 15

$\Omega = \{0,1\}^2$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$

$\omega_1 \hat{=}$ gesendetes Zeichen , $\omega_2 =$ empfangenes Zeichen

$0 \hat{=}$ Punkt , $1 \hat{=}$ Strich

Über das W-Maß P über Ω hat man folgende Annahmen

(1) $P(A_0) / P(A_1) = p = 3/5$

(2) $P(B_1 | A_0) = \alpha = 0.05$, $P(B_0 | A_1) = \beta = 0.04$

wobei
$A_0 = \{(0,0), (0,1)\}$ "Punkt gesendet"
$A_1 = \{(1,0), (1,1)\}$ "Strich gesendet"
$B_0 = \{(0,0), (1,0)\}$ "Punkt empfangen"
$B_1 = \{(0,1), (1,1)\}$ "Strich empfangen"

Wegen $A_0 + A_1 = \Omega$ gilt

$$1 = P(A_0) + P(A_1) = P(A_1)\left(1 + \frac{P(A_0)}{P(A_1)}\right) = P(A_1)(1+p)$$

also $P(A_1) = \frac{1}{1+p}$, $P(A_0) = 1 - P(A_1) = \frac{p}{1+p}$

Es folgt:

$$P\{(0,0)\} = P(B_0 \cap A_0) = P(B_0|A_0) \cdot P(A_0) = (1 - P(B_1|A_0)) \cdot P(A_0)$$
$$= (1-\alpha) \cdot \frac{p}{1+p} = \frac{3}{8} \cdot 0{,}95$$

$$P\{(0,1)\} = P(B_1 \cap A_0) = P(A_0)\, P(B_1 | A_0) = \frac{p}{1+p} \cdot \alpha = \frac{3}{8} \cdot 0{,}05$$

$$P\{(1,0)\} = P(B_0 \cap A_1) = P(A_1)\, P(B_0|A_1) = \frac{\beta}{1+p} = \frac{5}{8} \cdot 0{,}04$$

$$P\{(1,1)\} = P(B_1 \cap A_1) = P(A_1)\, P(B_1|A_1) = P(A_1)(1 - P(B_0|A_1))$$
$$= \frac{1}{1+p}(1-\beta) = \frac{5}{8} \cdot 0{,}96 \Longrightarrow P \text{ vollständig bekannt.}$$

$A := \{(0,0), (1,1)\}$ "empfangenes Zeichen ist richtig"

a) $P(A) = (1-\alpha)\frac{p}{1+p} + (1-\beta)\frac{1}{1+p}$

$= 0.95625$

b) $P(A|B_0) = \frac{P(A \cap B_0)}{P(B_0)} = \frac{P\{(0,0)\}}{P\{(0,0)\} + P\{(1,0)\}}$

$= \frac{(1-\alpha)\,p/(1+p)}{(1-\alpha)\frac{p}{1+p} + \frac{\beta}{1+p}} = \frac{(1-\alpha)\,p}{(1-\alpha)\,p + \beta}$

≈ 0.93443

Mit Bayes-Formel dasselbe:

$P(A|B_0) = P(A_0|B_0) \underset{\text{Bayes}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{P(A_0)\,P(B_0|A_0)}{P(A_0)\cdot P(B_0|A_0) + P(A_1)\cdot P(B_0|A_1)}$

$= \left(1 + \frac{P(A_1)}{P(A_0)} \cdot \frac{P(B_0|A_1)}{P(B_0|A_0)}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{p}\,\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{-1}$

c) $P(A|B_1) = P(A \cap B_1) \,/\, P(B_1)$

$= P\{(1,1)\} \,/\, P(B_1) = \frac{(1-\beta)/(1+p)}{\frac{p}{1+p}\cdot\alpha + \frac{(1-\beta)}{1+p}}$

$= \frac{1-\beta}{\alpha \cdot p + (1-\beta)} \approx 0.96970$