Schwerpunkt Math. Statistik **Prof.Dr.G.Neuhaus**
und Stochastische Prozesse

SS 2005
Präsenzaufgabensammlung I zur Vorlesung
Stochastik für Informatiker/Wirtschaftsinformatiker

P-Aufgabe 1. Ein technisches System bestehe aus 3 Teilsystemen, die in einem betrachteten Zeitraum zufallsbedingt ausfallen können oder nicht.
a) Mit der Kodierung $'0'$ für Ausfall und $'1'$ für Nichtausfall gebe man einen geeigneten Stichprobenraum Ω für die möglichen Zustände des Gesamtsystems an.
b) Für die zufälligen Ereignisse A : 'Genau 2 Teilsysteme fallen aus', B : ' Das Teilsystem 1 fällt aus', bestimme man $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, A^c, B^c$ als Teilmengen von Ω und formuliere diese zufälligen Ereignisse in Worten.
c) Man bestimme die zufälligen Ereignisse
C : 'Kein Teilsystem fällt aus'
D : 'Höchstens ein Teilsystem fällt aus'
E : 'Mindestens ein Teilsystem fällt aus',
sowie $A \cap E, E \setminus B, B \cap C, B \cap D$.
d) Welche der Ereignisse A, B, C, D, E sind paarweise unvereinbar?

P-Aufgabe 2. Die Qualität von 100 Bauteilen werde geprüft (erste bis dritte Wahl, Ausschuß).
Man formuliere einen geeigneten Merkmalraum
(a) für ein Fertigungsprotokoll (um Störungen zu erkennen),
(b) für das zusammengefaßte Gesamtergebnis.

P-Aufgabe 3. Man vereinfache die folgenden Ausdrücke:
a) $(A \cup B)(A \cup B^c)$, b) $(AB) \cup (AB^c)$,
c) $(A \cup B)(B \cup C)$, d) $(A \cup B)(A^c \cup B)(AB^c)$,
e) $(A \cup B)(A^c \cup B)(A \cup B^c)$.

P-Aufgabe 4. Seien A, B und $A_1, A_2, \ldots$ Teilmengen von Ω und $A \Delta B := AB^c + BA^c$. Der Indikator 1_A ist definiert als Funktion auf Ω, die auf A gleich 1 und sonst gleich 0 ist. Man zeige:
a) $1_A = 1 - 1_{A^c}$; b) $1_{\cap_i A_i} = \prod_1^\infty 1_{A_i}$; c) $1_{\sum_i A_i} = \sum_i 1_{A_i}$;
d) $1_{\cup_i A_i} = \max_i 1_{A_i}$; e) $1_{\cap_i A_i} = \min_i 1_{A_i}$; f) $1_{A \Delta B} = | \ 1_A - 1_B \ |$.

P-Aufgabe 5. Zum Aufwärmen: Man fülle die fehlenden Stellen der Tabelle aus:

$P(A)$	$P(B)$	$P(A \cup B)$	$P(A \cap B)$	$P(A \setminus B)$	$P(B \setminus A)$	$P(A \triangle B)$
0.7	0.6	0.9				
			0.1	0.3	0.2	
	0.8	1	0			
0.6	0.4		0.4			
0.5	0.5	0.5				
	0.6		0.2	0.1		
0.4		0.7				0.5

P-Aufgabe 6. Man zeige ohne Abzählen: Beim Werfen mit 3 Würfeln (Laplace-Experiment, d.h. alle 6^3 Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich) ist die W., eine Augensumme ≤ 10 zu erzielen, gleich 1/2.
Hinweis: Das gesuchte Ereignis und sein Komplement haben gleich viele Elemente.

P-Aufgabe 7. Sei $\omega_1, \omega_2, \ldots$ eine Folge von Versuchsergebnissen im Stichprobenraum Ω. Für $A \subset \Omega$ sei

$$H_n(A) = \frac{\sum_{i=1}^n 1_A(\omega_i)}{n}$$

die relative Häufigkeit des Eintretens von A nach n Versuchen.
Man zeige, daß H_n ein W-Maß über $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ist.

P-Aufgabe 8. $(A_n, n \in \mathbb{N})$ seien Teilmengen von Ω. Man schreibe die folgende Formel für $N = 2$ und $N = 3$ in ausführlicher Form (z.B. $A_1 \cup A_2 = \ldots$)
und beweise sie für beliebiges N. Gilt die Formel auch für $N = \infty$?

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \sum_{n=1}^{N} (A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i).$$

Man beweise mit dieser Formel die Sub-Sigma-Additivität (3.6) (Kurzskript).

P-Aufgabe 9. Die Zahl der Wählversuche am Telefon werde modelliert durch $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ und die Z-Dichte $f(k) = c \cdot 0.8^k, \;\; 1 \leq k \leq 6\,.$
(a) Man bestimme die Konstante c. (Dabei kann die geometrische Reihe
$a + a\,q + a\,q^2 + \ldots = a/(1-q)$ hilfreich sein.)
(b) Man bestimme P(„mindestens drei Versuche werden benötigt").

P-Aufgabe 10. *Frage des Chevalier de Méré :* Ist es vorteilhafter, beim Spiel mit einem Würfel auf das Eintreten mindestens einer 6 in vier Würfen oder beim Spiel mit zwei Würfeln auf das Eintreten einer Doppel-6 (Sechserpasch) in 24 Würfen zu setzen?(Jeweils Stichprobenraum und W-Maß angeben!)

P-Aufgabe 11. Seien $\varepsilon_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, reelle Zahlen.

Aus $P(A_n) \geq 1 - \varepsilon_n \; \forall n$ folgt $P\left(\bigcap_n A_n\right) \geq 1 - \sum_n \varepsilon_n$.

P-Aufgabe 12. Man beweise die Operationstreue der Mengenabbildung X^{-1} der Vorlesung.

P-Aufgabe 13. Wie groß ist die W. beim Geburtstagsexperiment dafür, dass es genau ein Paar gibt, das am selben Tag Geburtstag hat?

P-Aufgabe 14. Sei (Ω, P) ein diskreter W.-Raum und seien $A, B \subset \Omega$ gegeben mit $P(A) \in \{0, 1\}$. Man zeige, dass dann A und B stochastisch unabhängig sind.

P-Aufgabe 15. Bei einem schriftlichen Test werden „Multiple-Choice"-Fragen gestellt, bei denen von je 3 vorgegebenen Antworten genau eine richtig ist.
Man nehme an, daß ein Teilnehmer mit Wahrscheinlichkeit 40% auf jede der Fragen die richtige Antwort weiß und sonst zufällig ankreuzt.
Unter Verwendung von bedingten Wahrscheinlichkeiten bestimme man für eine einzelne Frage
(a) die Wahrscheinlichkeit, daß er die richtige Antwort ankreuzt,
(b) die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß er bei einer richtig angekreuzten Antwort diese auch tatsächlich wußte.
Hinweis: Man wähle als Grundraum $\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$, wobei die erste Komponente bedeute: Teilnehmer weiß die richtige Antwort ((1:ja),(0:nein)), während die zweite Komponente bedeute: Teilnehmer kreuzt die richtige Anwort an ((1:ja),(0:nein)).

P-Aufgabe 16. Jemand geht zur Straße und wartet auf ein Taxi. Die Wartezeit W_1 (in Minuten) sei $Geo^+(0.2)$-verteilt.
a) Wie groß ist die W., dass in den ersten 5 Minuten kein Taxi kommt?
b) Wie groß ist unter der Bedingung, dass nach 10 Minuten noch kein Taxi da ist, die bedingte W., dass noch einmal mehr als 5 Minuten gewartet werden muss?

P-Aufgabe 17. Seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängige reellwertige ZV mit derselben Verteilung auf einem diskreten W-Raum (Ω, P) und $A \subset \Omega$. Man berechne Erwartungswert und Varianz der diskreten ZV'n

$$\hat{P}(A) := \frac{1}{n}(1_A(X_1) + \cdots + 1_A(X_n)).$$

$\hat{P}(A)$ heißt empirisches Maß. Warum wohl? Man stelle eine Beziehung zum Bernoullischen Schwachen Gesetz der großen Zahlen (Kurzskript Satz 4.5) her.

P-Aufgabe 18. a) Es werde einmal mit einem fairen Würfel geworfen. Sind für festes $i \in \{1, \ldots, 6\}$ jeweils die beiden Ereignisse A_0 und A_i stochastisch unabhängig? Wobei $A_0 := \{$ Es fällt eine gerade Augenzahl$\}$ und $A_i := \{$ Die Augenzahl ist größer oder gleich $i\}$.
b) Eine homogene Münze werde n-mal geworfen ($n \geq 2$). Sind die Ereignisse $B_1 := \{$ Höchstens einmal erscheint „Zahl"$\}$ und $B_2 := \{$ „Zahl" und „Kopf" fallen mindestens einmal$\}$ stochastisch unabhängig?

P-Aufgabe 19. Eine ideale Münze werde 3 mal unabhängig geworfen. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim ersten Wurf „Zahl" erscheint, unter der Bedingung, daß insgesamt genau zweimal „Zahl" geworfen wurde?

P-Aufgabe 20. Man konstruiere eine Verteilung auf drei Punkten des R^2 derart, dass die Projektion X auf die x-Achse und die Projektion Y auf die y-Achse unkorreliert, aber nicht stochastisch unabhängig sind.

P-Aufgabe 21. Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. mit $EX_i = a$ und $VarX_i = \sigma^2$. Man zeige, dass aus dem zentralen Grenzwertsatz, d.h. aus

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - a)}{\sigma} \leq x\} = \Phi(x) \quad \forall x$$

das schwache Gesetz der großen Zahlen folgt, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|\bar{X}_n - a| \leq \varepsilon\} = 1 \; \forall \varepsilon > 0.$$

P-Aufgabe 22. Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Welche $\sigma-$Algebra $\mathcal{A}$ wird von den Teilmengen
a) $\{1, 2, 3\}$ und $\{4, 5\}$
b) $\{1, 2, 3\}$ und $\{3\}$
in Ω erzeugt?

P-Aufgabe 23. X sei eine reelle ZV mit Riemann-Dichte f, die symmetrisch um $x = a$ sei, d.h. $f(a+x) = f(a-x)$. Man zeige: Falls der Erwartungswert von X existiert, so gilt $EX = a$.

P-Aufgabe 24. $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$ seine stochastisch unabhängige reelle ZV mit Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$.
Man bestimme die VF von
a) $\max(X_1, \ldots, X_n)$
b) $\min(X_1, \ldots, X_n)$.

P-Aufgabe 25. Seien X_1 und X_2 reelle ZV mit R-Dichten f_1 und f_2 derart, dass $EX_i = \int_{-\infty}^{\infty} x f_i(x)dx$ endlich ist. Mit Hilfe der aus der Faltungsformel stammenden R-Dichte $h(y)$ der Summe $Y := X_1 + X_2$ schreibe man $EY = \int_{-\infty}^{\infty} yh(y)dy$ und zeige, dass dann

$$E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2$$

gilt.

P-Aufgabe 26. Seien X_1 und X_2 i.i.d. mit $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Man erinnere sich, wie die Dichte von X_i^2 aussieht und bestimme mit der Faltungsformel die Dichte $h(y)$ von $Y := X_1^2 + X_2^2$. Wie ist die Bezeichnung für die zu h gehörige Verteilung?

P-Aufgabe 27. Sei X eine reellwertige, diskrete ZV mit $EX^2 < \infty$. Man bestimme den Minimalwert von $h(a) := E(X - a)^2$.

P-Aufgabe 28. Der Geschäftsverlauf einer Firma werde als „gut“ oder „mäßig“ eingestuft. Die Wahrscheinlichkeit, von einem Quartal zum nächsten von „mäßig“ nach „gut“ (bzw. umgekehrt) zu gelangen, sei 0,3 (bzw. 0,2).
(a) Man beschreibe diesen Vorgang als Markov-Kette und gebe den Übergangs-Graph an.
(b) Wenn im ersten Quartal beide Stufen gleich wahrscheinlich sind, wie sind dann die Wahrscheinlichkeiten im zweiten Quartal?
(c) Man bestimme die Gleichgewichts-Verteilung.
(d) Was sagt diese aus?

P-Aufgabe 29. Man skizziere die Übergangs-Graphen zu den folgenden Übergangsmatrizen für die Zustandsmenge $I = \{1, 2\}$:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}0 & 1{,}0 \end{pmatrix}$

Für die zugehörigen Markov Ketten (X_n) bestimme man $a_n := P(X_n = 1)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ mit $a_0 = 1/0{,}5/0$ und beobachte das langfristige Verhalten.