Schwerpunkt Mathematische Statistik und Stochastische Prozesse **Prof.Dr.G.Neuhaus**

SS 2005
Korrekturaufgabensammlung I zur Vorlesung
Stochastik für Informatiker/Wirtschaftsinformatiker

K-Aufgabe 1. Es werde mit zwei Würfeln gewürfelt, und es bezeichne A_k bzw. B_k das zufällige Ereignis, dass Würfel 1 bzw. Würfel 2 die Augenzahl k aufweist. Man drücke die folgenden zufälligen Ereignisse mit Hilfe der A_k und B_k und Mengenoperationen aus und gebe ihre Elementzahl an (jeder Teil 0.5 Punkte):

a) Die Augenzahl beider Würfel ist gerade (Ereignis A)
b) Die Augensumme beträgt 4 (Ereignis B)
c) Entweder Würfel 1 oder Würfel 2 hat eine Augenzahl, die höchstens gleich 3 ist (Ereignis C)
d) Die Summe der Augenzahlen ist ungerade (Ereignis D)

K-Aufgabe 2. (2 Punkte) Für eine Folge $A_1, A_2, \ldots$ von Teilmengen aus Ω zeige man:
a) Bezeichnet $|T|$ die Anzahl der Elemente von T, so gilt

$$1_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = \sum_{\emptyset\neq T\subset\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|T|-1} 1_{\bigcap_{i\in T} A_i}.$$

Hinweis: Die linke Seite ist gleich $1 - \prod_{i=1}^n (1 - 1_{A_i})$.
b) Sind die Mengen $A_1, A_2, \ldots$ endlich, so gilt

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{\emptyset\neq T\subset\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|T|-1} |\bigcap_{i\in T} A_i|.$$

K-Aufgabe 3. (4 Punkte) a) k unterscheidbare Kugeln werden auf durchnummerierte Fächer $1, \ldots n$ (mit möglicher Mehrfachbesetzung) verteilt. Man berechne mit Hilfe von K-Aufgabe 2 die Zahl der Zuordnungen der Kugeln zu den Fächern, bei denen mindestens ein Fach leer bleibt.
b) n unterscheidbare Kugeln werden auf durchnummerierte Fächer $1, \ldots n$ (ohne Mehrfachbesetzung) verteilt. Man berechne die Zahl der Anordnungen, bei denen mindestens eine Kugelnummer mit der Fachnummer übereinstimmt.

K-Aufgabe 4. Es werden n Aufträge zufällig auf N unterscheidbare (d.h. durchnummerierte) Schalter verteilt, wobei
a) die Aufträge ebenfalls unterscheidbar seien, (1 Punkt)

b) die Aufträge nicht unterscheidbar seien, (2 Punkte)
c) die Aufträge nicht unterscheidbar seien und jeder Schalter maximal einen Auftrag entgegennimmt ($N \geq n$). (2 Punkte)
Die jeweils möglichen unterscheidbaren Aufteilungen der Aufträge auf die Schalter werden als gleichwahrscheinlich angenommen (Laplace-Experiment). Wie groß ist in jedem der obigen Fälle die Wahrscheinlichkeit, dass Schalter 1 genau k Aufträge erhält, $k \in \{0, \ldots, n\}$?

K-Aufgabe 5. (Jeder Teil 0.5 Punkte) Eine Urne enthalte 10 blaue, 8 gelbe und 7 rote Kugeln. Es werden nacheinander rein zufällig 3 Kugeln entnommen. Wie groß ist die W. dafür dass
a) alle 3 entnommenen Kugeln blau sind
b) die Farben der Kugeln verschieden sind,
c) 2 gelbe und 1 blaue Kugel entnommen wird,
wenn die entnommene Kugel jeweils vor der nächsten Ziehung
1. zurückgelegt wird, 2. nicht zurückgelegt wird?

K-Aufgabe 6. (Jeder Teil 0.5 Punkte) Ein Pixel einer Grafik habe (zur Vereinfachung) 16 Farb- und 16 Graustufen (0,1,...,15). Jede der 256 Kombinationen sei gleich häufig vertreten. Für ein zufällig herausgegriffenes Pixel sei X die Farbe und Y die Graustufe. Man formuliere ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell und berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
(a) '$X = 3$', (b) '$Y \neq 4$', (c) '$X \neq Y$', (d) '$X > Y$',
(e) '$X + Y = 9$', (f) '$X > 4$ und $Y > 4$'.

K-Aufgabe 7. (2 Punkte)
Sei $(P_i,\ i \geq 1)$ eine Folge von diskreten W-Maßen über $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, $(a_i,\ i \geq 1)$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen und $(A_i, i \geq 1)$ eine Folge von Teilmengen von Ω mi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i P(A_i) = 1$ und $(A_i,\ i \geq 1)$ eine Folge von Teilmengen von Ω. Man zeige: Durch $P(A) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, P_i(A_i A), A \subset \Omega$, wird ein diskretes W-Maß P über $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ definiert.

K-Aufgabe 8. Eine Firma hat 5 externe Telefonanschlüsse. Man beschreibe die mögliche momentane Belegung durch einen Merkmalraum Ω
(a)(0.5 Punkte) ohne,
(b)(0.5 Punkte) mit Unterscheidung der einzelnen Leitungen.
(c) (1 Punkt) Zur Überprüfung der Telefonkosten soll die Zahl der Telefongespräche eines Tages und die Dauer jedes Gesprächs festgehalten werden.
Man formuliere dazu einen geeigneten Merkmalraum.

K-Aufgabe 9. (4 Punkte) Der Sultan spricht zu Ali Baba: Hier sind zwei Urnen sowie a weiße und b schwarze Kugeln. Verteile die Kugeln auf die beiden Urnen nach Belieben. Danach werde ich die Urnen für Dich ununterscheidbar machen und Du sollst eine Kugel ziehen. Ist sie weiß, sei Dir das Leben geschenkt, ansonsten...
Wie kann Ali Baba seine Chance maximieren? Exakter Nachweis!
Hinweis: Sei $p(c, d)$ die W., eine weiße Kugel zu ziehen, wenn in einer Urne c weiße und d

schwarze liegen. Man zeige zunächst

$$p(c,0) - p(c,d) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{a+b-c-d} \cdot \frac{(a-c)(a-2c)}{(c+b)(a+b-c)} \geq 0,$$

falls $2c \leq a$, was o.E. vorausgesetzt werden kann.

K-Aufgabe 10. Sei (Ω, P) ein diskreter W-Raum und seien $A_1, \dots, A_n$ Teilmengen von Ω.
a) (2 P) Für jedes $\omega \in \Omega$ sei die Menge A_ω definiert als der Durchschnitt aller Mengen A_i, die ω enthalten und aller Mengen A_i^c, die dies tun. Man zeige: Es gibt nur endlich viele nichtleere Mengen A_ω (die wir $E_1, \dots, E_k$ nennen wollen), und für diese gilt $E_1 + \dots + E_k = \Omega$. Man erhält die E_i auch indem man zunächst Ω in die beiden disjunkten Mengen A_1 und A_1^c zerlegt; dann jede dieser Mengen durch Schneiden mit A_2 und A_2^c wieder in höchstens 2 neue Mengen zerlegt, usw. Die am Ende herauskommenden nichtleeren Mengen sind die obigen E_i.
b) (1 P) Seien $\omega_i \in E_i$, $i \in \underline{k}$, beliebige, festgewählte Punkte und P_0 das diskrete W-Maß

$$P_0(A) := \sum_{j=1}^{k} P(E_j) 1_A(\omega_j), \; A \subset \Omega$$

auf Ω. Man zeige, dass P_0 und P auf dem Mengensystem $\mathcal{A}_0 := \{\sum_{j \in T} E_j \; : \; T \subset \underline{k}\}$ übereinstimmen.
c) (1 P) Mit Hilfe von K-Aufgabe 2 und b) zeige man die sog. Siebformel, die aus K-Aufgabe 2 a) ensteht, wenn man 1_{Menge} durch $P(Menge)$ ersetzt.

K-Aufgabe 11. Sei eine Urne gegeben mit einer unbekannten Zahl $\vartheta \in \{1, 2, \dots\} =: \Theta$ von durchnummerierten Kugeln. Es werde n mal zufällig ohne Zurücklegen in die Urne gegriffen.
a) (1 P) Aus den gezogenen Kugelnummern $(k_1, \dots, k_n)$ berechne man denjenigen Wert $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(k_1, \dots, k_n)$ von ϑ, für den das Auftreten der $(k_1, \dots, k_n)$ maximal wird (den sog. Maximum-Likelihood Schätzer für ϑ).¿ Man suche also $\hat{\vartheta}$ mit

$$P_{\hat{\vartheta}}\{(k_1, \dots, k_n)\} = \max_{\vartheta} P_\vartheta\{(k_1, \dots, k_n)\}.$$

b)(3 P) Sei $X = \max(k_1, \dots, k_n)$. Man zeige in der obigen Situation, dass für $n \leq x \leq \vartheta$ die Gleichung

$$P_\vartheta\{X = x\} = \frac{\binom{x-1}{n-1}}{\binom{\vartheta}{n}} \tag{1}$$

gilt, indem man zunächst

$$P_\vartheta\{X \leq x\} = \frac{x!(\vartheta - n)!}{(x-n)!\vartheta!}$$

für $n \leq x \leq \vartheta$ beweist.
Man verifiziere zudem das Ergebnis für den sogenannten Erwartungswert $E_\vartheta X$ von X:

$$E_\vartheta X := \sum_{x=n}^{\vartheta} x P_\vartheta\{X = x\} = \frac{(\vartheta+1)n}{n+1}.$$

Hinweis für die Berechnung von $E_\vartheta X$: $x\binom{x-1}{n-1} = n\binom{x}{n}$; man beachte, dass die Werte in (1) sich zu 1 aufaddieren, auch für andere Werte von n und ϑ.

K-Aufgabe 12. (3P) Ein idealer Würfel mit n Seiten wird zweimal geworfen (unabhängig). Es bezeichne X die Augenzahl des 1. Wurfes, Y die des 2. Wurfes. Man berechne die Zähldichte $P\{Z = z\}$ von $Z = X + Y$, $Z = |X - Y|$ und $Z = \max(X, Y)$.

K-Aufgabe 13. (3 Punkte) P und Q seien diskrete W-Maße über $\mathbb{R}$. Man nennt P stochastisch größer als Q, falls gilt $P((x,\infty)) \geq Q((x,\infty))\ \forall x \in \mathbb{R}$ und $P \neq Q$. Für jedes $K \in \{0, \dots, N\}$ sei P_K die hypergeometrische Verteilung mit den Parametern N, K, n, d.h.

$$P_K\{k\} = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}\Big/\binom{N}{n}, \qquad \max(0, n+K-N) \leq k \leq \min(n, K).$$

Man zeige: Für $K_2 > K_1$ ist P_{K_2} stochastisch größer als P_{K_1}.
Hinweis: Die Lösung geht einfacher ohne Rechnung. Denken Sie daran, wie wir die hypergeometrische Verteilung hergeleitet haben, wobei wir bei der $\mathcal{H}(N, K, n)$-Verteilung K Kugeln als 'rot' und die restlichen $N - K$ als 'schwarz' bezeichnet hatten. Übergang von K zu $K + 1$ bedeutet dann Umfärbung einer schwarzen Kugel zu einer roten.

K-Aufgabe 14. Ein Interessent für einen Restposten von N Platinen mit einer unbekannten Zahl K von intakten Exemplaren möchte den Posten kaufen, wenn mindestens $2/3$ der Platinen in Ordnung sind. Er sucht nach einem Entscheidungsverfahren, das höchstens mit 2.5% W. zu einem Fehlkauf führt. Dazu kauft er eine zufällige Auswahl von n Platinen und stellt fest, dass k von den n Platinen in Ordnung sind. Sein Entscheidungsverfahren lautet: Ist k größer als ein vorzugebender kritischer Wert k_0, so kaufe den Restposten. Weil er wirkliches Interesse an dem Kauf hat, falls mindestens $2/3$ der Platinen in Ordnung sind, möchte er k_0 natürlich minimal wählen unter der Nebenbedingung, dass bei $K/N < 2/3$ die (Fehl-)Kaufwahrscheinlichkeit $\leq 2,5\%$ ist.
a) (1 Punkt) Man bestimme mit Hilfe von K-Aufgabe 13 prinzipiell eine Lösung dieses Problems, gebe also an, wie k_0 im Prinzip zu bestimmen ist.
b) (2 Punkte) Wie lautet die Entscheidung des Käufers im Fall
1) $N = 14$, $n = 6$, $k = 6$; 2) $N = 30$, $n = 10$, $k = 9$?
Hinweis: Man wähle $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ und bezeichne mit P_K die hypergeometrische Verteilung $\mathcal{H}(N, K, n)$ auf Ω (Nicht alle Punkte sind Trägerpunkte).
Wenn k_0 gegeben ist, so ist wird das Ereignis 'Kauf' durch $\{k \in \Omega : k > k_0\}$ repräsentiert.

K-Aufgabe 15. Bei der Übertragung der Zeichen „Punkt“ und „Strich“ in einem Fernmeldesystem werden durch Störungen im Mittel 5% der gesendeten Punkte als Striche und 4% der gesendeten Striche als Punkte empfangen (das sind also vorgegebene bedingte Wahrscheinlichkeiten). Das Verhältnis von gesendeten Punkten zu gesendeten Strichen ist 3/5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a)(1.5 Punkte) ein empfangenes Zeichen richtig empfangen wurde,

b)(1.5 Punkte) das richtige Zeichen empfangen wurde, falls „Punkt“ empfangen wurde,

c)(1 Punkt) das richtige Zeichen empfangen wurde, falls „Strich“ empfangen wurde?

Hinweis: Als Grundraum eignet sich $\Omega = \{0,1\}^2$, wobei die erste Komponente das gesendete und die zweite das empfangene Zeichen kennzeichne.$A_0 = \{(0,0),(0,1)\}$ bedeutet dann z.B. 'Punkt gesendet'. Entsprechend sei A_1 das Ereignis 'Strich gesendet'. Nach Voraussetzung ist $P(A_0)/P(A_1) = 3/5$. Entsprechend definiere man die Mengen B_0 'Punkt empfangen' bzw. B_1 'Strich empfangen'.
Man beachte auch $P(A_0) + P(A_1) = 1$ (warum gilt das?).

K-Aufgabe 16. Ein Krebstest ergebe bei erkrankten Personen mit einer Sicherheit von 94% ein positives Ergebnis, bei gesunden Personen mit 96% ein negatives.
Im Durchschnitt sei jede 140-ste Person befallen.
(a)(1.5 Punkte) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Versuchsperson, die ein positives Testergebnis erhält, auch wirklich Krebs hat?
(b) (1.5 Punkte) Wie groß ist bei negativem Ausgang die Wahrscheinlichkeit, trotzdem krank zu sein?
Hinweis: Ein geeigneter Grundraum ist $\Omega = \{0,1\}^2$, wobei die erste Komp. den Status (krank=0, gesund=1) und die zweite das Testergebnis (positiv-negativ) kennzeichne. Man definiere wieder Mengen A_0 'Person krank', A_1 'Person gesund' , B_0 'Testergebnis positiv', B_1 'Testergebnis negativ'. Der mathematischen Sauberkeit wegen die Mengen explizit aufschreiben!

K-Aufgabe 17. Die Produktion einer Abteilung wird von zwei Kontrolleuren mit den Anteilen 30% bzw.70% sortiert. Dabei ist für den ersten bzw. zweiten Kontrolleur die W. dafür, eine Fehlentscheidung zu treffen gleich 0.03 bzw. 0.05. Es wird beim Versand ein fehlsortiertes Teil gefunden. Mit welcher W. wurde es
a)(1.5 Punkte) vom ersten bzw. vom zweiten Kontolleur sortiert?
b)(1.5 Punkte)Man bestimme die W. dafür, dass ein Teil richtig einsortiert wurde.
Hinweis: Ein geeigneter Grundraum ist $\Omega = \{1,2\}^2$, wobei die erste Komp. angibt, welcher Kontolleur sortiert hat und die zweite das Ergebnis '1 :korrekt sortiert', '2 :falsch sortiert' anzeigt. Man definiere sich wieder Mengen A_1 'Kontrolleur 1 hat sortiert', A_2 entsprechend, B_1 'Teil ist richtig sortiert', B_2 'Teil ist falsch sortiert'.

K-Aufgabe 18. (3 Punkte) Sei (Ω, P) ein diskreter W-Raum und seien $A_1, \dots A_n$ Teilmengen von Ω. Man zeige, dass aus der stochastischen Unabhängigkeit der A_i gemäß Def. 6.8 des Kurzskripts auch die stochastische Unabhängigkeit der Mengen $A_1^c, A_2, \dots, A_n$ folgt, d.h. die Menge A_1 soll durch A_1^c ersetzt werden.

K-Aufgabe 19. Ein bestimmter Relaistyp falle mit einer W. p bei einem einmaligen Schaltvorgang aus. Dann ist die Anzahl X der unabhängigen Schaltvorgänge bis zum ersten Ausfall geometrisch verteilt gemäß

$$P\{X = k\} = (1-p)^{k-1}p,\ k = 1, 2, \dots. \tag{2}$$

Es werden nun n gleichartige und voneinander unabhängige Relais parallel geschaltet. Die Anzahl der Schaltvorgänge dieser Relais kann man durch stochastisch unabhängige ZV $X_1, \ldots, X_n$ der obigen Art ausdrücken.
a) (2 Punkte) Wie groß ist die W. $w(r, n, p)$ dafür, dass mindestens eines der Relais r Schaltvorgänge ohne Defekt übersteht?
b)(2 Punkte)Sei $p = 10^{-4}$ und $r = 10^3$. Wieviele Relais n_* braucht man, damit die W. $w(r, n_*, p)$ mindestens 99.9% beträgt?

K-Aufgabe 20. Sei X geometrisch verteilt wie in (2).
a)(2 Punkte) Man berechne EX und $VarX$.
b)((2 Punkte) Sei $X \sim$ Poisson(λ). Man berechne EX und $VarX$.
c)(1 Punkte) Seine X_1 und X_2 stochastisch unabhängig mit $X_i \sim$ Poisson$(\lambda_i), i = 1, 2$. Man zeige mit der Faltungsformel, dass $X_1 + X_2 \sim$Poisson$(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Hinweis zu a): Man verwende ohne Beweis die Formeln

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \text{ falls } |x| < 1.$$

K-Aufgabe 21. (3 Punkte) Seien $Y, X_1, X_2, \ldots$ stochastisch unabhängig mit $Y \sim$Poisson(λ) und $X_i \sim B(1, p) \,\forall\, i$. Man zeige, dass $Z \sim$Poisson$(p\lambda)$ gilt, mit

$$Z = \begin{cases} X_1 + \cdots + X_Y, & \text{falls } Y = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{falls } Y = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Hinweis: Man verwende den Satz von der totalen W. (Kurzskript (6.2)) mit $B_i = \{Y = i\}, i = 0, 1, 2, \ldots$, sowie die Beziehung (6.15) zur Berechnung von $P\{Z = k\}$.
Anwendung: Wenn Y die Anzahl der Zerfälle einer radioaktiven Substanz pro Sekunde bedeutet und das Zählrohr nur mit Wahrscheinlichkeit p jeden einzelnen Zerfall registriert, dann ist die Gesamtzahl der tatsächlich registrierten Zerfälle gleich $X_1 + \cdots + X_Y$.

K-Aufgabe 22. (2 Punkte) Seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängige ZV mit $X_i \sim B(1, p) \,\forall\, i$. Man berechne

$$P_p\{(X_1, \ldots, X_n) = (x_1, \ldots, x_n)\}$$

für $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ und bestimme denjenigen Wert $\hat{p}$ von p, für den dieser Ausdruck maximal wird, den sog. Maximum-Likelihood Schätzer von p.

K-Aufgabe 23. Eine Untersuchung der Merkmale X der Dichte einer Erzsorte und Y des Metallanteils ergab die folgenden Werte

$x_i[\frac{g}{cm^3}]$	2.8	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.2	3.2	3.4	3.4
$y_i[\%]$	22	25	27	27	28	30	32	35	31	35

a) (2 Punkte) Man bestimme die Stichprobenvarianzen s_x^2, s_y^2, sowie die Stichprobenkorrelation r.
b) (2 Punkte) Man bestimme die Gleichung der Regressionsgeraden $a_0 + b_0 x$ und zeichne ein Schaubild der Beobachtungen zusammen mit der Regressionsgeraden.

K-Aufgabe 24. (4 Punkte) Es sollen die Längen L_1, L_2 zweier Stäbe gemessen werden. Hierzu wird ein Messgerät benutzt, dessen Messfehler Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 hat. Die Messfehler verschiedener Messungen sind stochastisch unabhängig. Den Gesamtfehler der Messungen $\hat{L}$ der Messungen $\hat{L_1}$ für L_1 und $\hat{L_2}$ für L_2 beurteilen wir mit

$$F = E(\hat{L_1} - L_1)^2 + E(\hat{L_2} - L_2)^2.$$

Wenn man jeden Stab einzel misst, ergibt sich ein Gesamtfehler von $F = 2\sigma^2$. Welches F ergibt sich, wenn man stattdessen folgende beiden Messungen benutzt und daraus Schätzwerte $\hat{L_1}$ für L_1und $\hat{L_2}$ für L_2 bestimmt?

- Man legt beide Stäbe aneinander und misst die Gesamtlänge $L_1 + L_2$
- Man legt beide Stäbe nebeneinander und misst die Differenz $L_1 - L_2$.

K-Aufgabe 25. (3 Punkte) Ein Tandem-Rechensystem besteht aus Komponenten, die parallel arbeiten und in sich wieder seriell aus je zwei Komponenten aufgebaut sind.
Ein ankommender Rechenauftrag wird genau dann erfolgreich bearbeitet, wenn mindestens eine der Tandem-Komponenten korrekt arbeitet. Es sei p_i die Zuverlässigkeit der i-ten Einheit, d.h. die W., dass diese Einheit funktionsfähig ist, $i = 1, \ldots, 4$. Dabei seien $i = 1, 2$ die seriellen Einheiten in der ersten Parallel-Komponente und $i = 3, 4$ die seriellen Einheiten in der zweiten Parallel-Komponente.

K-Aufgabe 26. (3 Punkte) S bezeichne die Summe der bei 1000-maligem Würfeln erzielten Augenzahlen. Man bestimme mit Hilfe der Tschebychev- Ungleichung eine untere Schranke für die W. der Ereignisses $\{3400 \leq S \leq 3600\}$.

K-Aufgabe 27. (4 Punkte) Die ZV X beschreibe die Anzahl der Würfe mit Ergebnis 'Kopf' beim n-maligen unabhängigen Werfen einer idealen Münze.
Man untersuche die ZV $Y := X - \frac{n}{2}$ und $Z := Y^2$ auf Unkorreliertheit.
Hinweis: Man kann leicht sehen, dass $Y \sim (-Y)$ und daraus leicht das Ergebnis bekommen. Man kann aber auch direkt die vorkommenden Erwartungswerte bestimmen. Dabei ist es am einfachsten zur Berechnung von EX^3 zunächst $EX(X-1)(X-2)$ zu berechnen, ähnlich wie bei der Berechnung der Varianz in Satz 4.9.

K-Aufgabe 28. (4 Punkte) In der Rush -Hour fahren gleichzeitig zwei Züge vom Ort A nach B. Die Bundesbahndirektion nimmt an, dass sie von insgesamt 1000 Personen benutzt werden, die zufällig und unabhängig voneinander einen der beiden Züge auswählen. Für wieviele Sitzplätze k (in jedem Zug) muss sie mindestens sorgen, damit alle Passagiere mit wenigstens 99% W. einen Sitzplatz erhalten? Man verwende den zentralen Grenzwertsatz mit Stetigkeitskorrektur!

K-Aufgabe 29. (4 Punkte) X_1 und X_2 seien zwei diskrete , stochastisch unbhängige ZV mit $X_i \sim$Poisson(a_i), $a_i > 0,\ i = 1, 2$.
Man zeige, dass

$$Q\{k\} := \mathbb{P}(\{X_1 = k\} | \{X_1 + X_2 = n\})$$

für festes $n \geq 1$ eine Binomialverteilung über $\{0, 1 \ldots, n\}$ ist.

K-Aufgabe 30. (4 Punkte) Sei X_i der Schaden des i-ten Versicherungskunden innerhalb eines Jahres, wobei $X_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$, stochastisch unabhängig und identisch verteilt seien mit $EX_i =: a \in \mathbb{R}$ und $VarX_i =: \sigma^2 \in (0, \infty)$.
Das Versicherungsunternehmen bestimmt die Prämie μ des Kunden z.B. nach dem Standardabweichungsprinzip

$$\mu = a + \lambda\sigma, \ \lambda > 0,$$

wobei λ ein Sicherheitszuschlag ist.
Wie ist λ approximativ zu wählen, wenn die W. dafür, dass die Summe der Schäden größer als die Prämieneinnahmen von den $n = 10000$ Kunden kleiner gleich 5% sein soll und weiterhin λ aus Absatzgründen minimal gewählt werden soll?
Hinweis: Zentralen Grenzwertsatz (Satz 9.15) anwenden. Das Ergebnis wird erstaunlicherweise für allgemeines n unabhängig von a und σ. Zur Bestimmung von μ in der Praxis müssen a und σ bekannt sein, z.B. Schätzwerte aus der Vergangenheit.

K-Aufgabe 31. a) (1 Punkt)Man zeige, dass $f(x) := \alpha e^{-\alpha x} 1_{(0,\infty)}(x), x \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, \infty)$, die Dichte eines W.Maßes P_α ist und bestimme die zugehörige Verteilungsfunktion.
b)(2 Punkte) Man berechne (mittels partieller Integration)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx.$$

c) (1 Punkt) Für eine ZV X mit $X \sim P_\alpha$ zeige man

$$\mathbb{P}(\{X \leq x + h\} | \{X > x\}) = \mathbb{P}\{0 < X \leq h\}, \ x, h > 0.$$

K-Aufgabe 32. Nichtnegative ZV beschreiben Lebensdauern, Wartezeiten, Arbeitsdauern, Übertragungsdauern von Nachrichten etc. Kennt man z.B. von der Übertragungsdauer X für eine Nachricht durch den Teil eines großen Netzwerkes nur die mittlere Übertragungszeit m (also *einen* Parameter der Verteilung), so nimmt man häufig als erste Näherung an, dass die Übertragungsdauer Exponential(α) verteilt ist, wobei α so festgelegt wird, dass $E_\alpha X = m$ gilt. Mit dieser Approximation werde im Folgenden gearbeitet.

a)(2 Punkte) Die mittlere Übertragungszeit sei 36 (sec). Man berechne die W.,

1.) dass eine Übertragung weniger als 30 sec dauert,
2.) 90 % aller Übertragungen dauern weniger als $t \geq 0$ sec. Wie groß ist t?
b)(2 Punkte) Bei der Planung eines Übertragungssystems ist eine typische Art von Leistungsanforderung durch den Betreib '95 % aller Übertragungsvorgänge durch das Teilnetz dürfen nicht mehr als Z sec benötigen'.
Durch geeignete Auslegung des Netzes lann man die mittlere Übertragungszeit entsprechend einstellen. Welche mittlere Übertragungszeit muss erreicht werden, um dass obige Kriterium zu erfüllen?

K-Aufgabe 33. (3 Punkte) Man untersuche, ob bei geeigneter Wahl der Konstanten $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ die Funktionen
1.) $f_1(x) := (\frac{1}{2} + c_1 x) 1_{(0,1]}(x)$

2.) $f_2(x) := (1 + c_2 x)1_{(0,3]}(x)$
3.) $f_3(x) := c_3(1 - x)^2 1_{(0,1]}(x),\ x \in \mathbb{R}$,
(Riemann-)Dichten von W-Maßen sind und berechne gegebenenfalls die zugehörigen Verteilungsfunktionen.

K-Aufgabe 34. Der Anhalteweg X eines mit 60 km/h fahrenden Autos setzt sich additiv zusammen aus dem Reaktionsweg X_1 und dem Bremsweg X_2, wobei X_1 und X_2 stochastisch unabhängige (näherungsweise) $\mathcal{N}(14, 9)$ bzw. $\mathcal{N}(36, 25)$ verteilte ZV sind.
a)(1 Punkt) Man bestimme die Verteilung des Anhalteweges X.
b)(2 Punkte) Mit welcher W. ist der Anhalteweg X länger als 62 m?

K-Aufgabe 35. (4 Punkte) Die Lebensdauern von n elektrischen Elementen sind stochastisch unabhängige exponentialverteilte ZV mit Parameter $\lambda > 0$.
Die Parallelschaltung, bzw. Serienschaltung der Elemente ist genau dann funktionstüchtig, wenn mindestens eines bzw. jedes der Elemente funktionstüchtig ist.
Man berechne die Verteilungsfunktionen und daraus die Riemann-Dichten der Lebensdauern beider Schaltungen.

K-Aufgabe 36. (4 Punkte) Man berechne für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \varphi(x)\, dx$$

mit $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Hinweis: Partielle Integration. Vorausgesetzt wird, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1$$

gilt. Man beachte auch, dass $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$.

K-Aufgabe 37. a)(2 Punkte) Die ZV X_1 und X_2 seien i.i.d mit $X_i \sim \mathcal{R}(0, 1)$. Man bestimme die Dichte der Summe $X_1 + X_2$.
b) (2 Punkte) Welche Dichte hat $X_1 + X_2$ bei stochastischer Unabhhängigkeit der X_i falls $X_i \sim \mathcal{R}(-1, 1)$. (Teil a) verwenden!)

K-Aufgabe 38. Seien $U_1, \ldots, U_n$ stochastisch unabhängige, identisch verteilte ZV mit $X_i \sim \mathcal{R}(0, 1)$.
a) (2 Punkte)Man berechne den Erwartungswert und die Varianz der ZV S_n mit

$$S_n = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{i=1}^{n} (U_i - \frac{1}{2}),$$

wobei man dieselben Rechenregeln für den Erwartungswert (Linearität) und für die Varianz bei stochastischer Unabhängigkeit wie bei diskreten Modellen auch hier im Rahmen mit R-Dichten verwende. Wie ist S_n approximativ verteilt? (Zentralen Grenzwertsatz heranziehen, der auch im allgemeinen, nicht-diskreten Fall gilt.)
b) (3 Punkte)Für $n = 12$ wird diese Summe besonders einfach. Anhand einer Simulation von $N = 500$ Stichproben von je 12 ZV'n $U_1, \ldots, U_{12}$ vergleiche man die empirische Verteilungsfunktion

$$\hat{F}(x) = \frac{\text{Anzahl der Stichproben mit } S_{12} \leq x}{500}$$

mit der Funktion Φ (Skizze) und beurteile, ob sich das Verfahren zur Erzeugung von normalverteilten ZV'n eignet.

K-Aufgabe 39. (3 Punkte) Die folgenden Messwerte seien Realisierungen von i.i.d. normalverteilten Zufallsvariablen. Man bestimme jeweils ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ mit $\alpha = 0.05$ für den Mittelwert a gemäß der Formel

$$[\bar{X}_n - \frac{t_{n-1,\alpha/2}}{\sqrt{n}}\hat{\sigma}_n, \bar{X}_n + \frac{t_{n-1,\alpha/2}}{\sqrt{n}}\hat{\sigma}_n],$$

wobei $t_{n-1,\alpha/2}$ das $\alpha/2-$Fraktil der Studentschen t-Verteilung ist mit $n-1$ Freiheitsgraden (s. Tabellenanhang im Buch von Behnen/Neuhaus oder Hübner) und $\bar{X}_n$ das Stichprobenmittel, sowie $\hat{\sigma}_n^2$ die Stichprobenvarianz bedeuten:
a) Gewicht [g] von Abziehpapier
4.3 4.5 4.2 4.3 4.3 4.7 4.4 4.2 4.3 4.5
b) Länge [mm] von Streichhölzern
44.4 44.2 44.3 44.2 44.6 44.4 44.7 44.3 44.5 44.9

c) Gehirngewicht x [g] von 98 Albinomäusen

x	Häufigkeit	x	Häufigkeit
0.36	1	0.46	9
0.37	1	0.47	7
0.38	1	0.48	6
0.39	3	0.49	5
0.40	4	0.50	3
0.41	6	0.51	2
0.42	12	0.52	1
0.43	12	0.53	0
0.44	14	0.54	2
0.45	9	0.55	0

K-Aufgabe 40. Für Parameterwerte $\alpha, \beta > 0$ ist die *Gamma*(α,β)*-Verteilung* definiert durch die R-Dichte $f_{\alpha,\beta}$ gemäß

$$f_{\alpha,\beta}(x) \;=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\;1_{(0,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$, $\alpha > 0$, die Gammafunktion bezeichnet.
Man zeige:
a)(2 Punkte) $X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow X^2 \sim$ Gamma $(1/2, 1/2)$.
b) (2 Punkte) Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig mit $X_i \sim$ Gamma(α_i, β), so folgt $X_1 + X_2 \sim$ Gamma$(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.
c)(2 Punkte) Sind $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ so nennt man $\mathcal{L}(X_1^2 + \cdots + X_n^2)$

eine *zentrale Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden,* kurz χ_n^2-Verteilung. Es gilt χ_n^2 =Gamma$(n/2, 1/2)$. Die χ_n^2-Verteilung hat also die Dichte

$$h_n(x) \;=\; \frac{1}{\Gamma(n/2)\, 2^{n/2}}\, x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-x/2}\, 1_{(0,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung zu b): Bei der Anwendung der Faltungsformel (13.4) ergibt sich als Nebenprodukt die Gleichung

$$B(p,q) \;:=\; \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx \;=\; \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad p>0,\;\; q>0.$$

$B(p,q)$ ist die *Betafunktion.*

K-Aufgabe 41. (4 Punkte)Seien X_1 und X_2 i.i.d. mit $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. Man zeige, dass $(X_1+X_2)/\sqrt{2}$ und $(X_1-X_2)/\sqrt{2}$ ebenfalls i.i.d. und $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt sind. Hinweis: Transformationsformel für R-Dichten anwenden.