Schwerpunkt Math. Statistik und Stochastische Prozesse

Prof.Dr.G.Neuhaus

SS 2005
Aufgabensammlung II zur Vorlesung
Stochastik für Informatiker/Wirtschaftsinformatiker

A 1.5.1: Bei einem lokalen Leichtathletikwettkampf in England wurden 1991 im Kugelstoßen die folgenden Weiten (in Metern) erzielt (aus [Ha] S. 48):

17.79	17.21	16.47	16.27	15.53	14.92	14.72	14.63	14.23	13.70
14.52	14.46	13.22	11.75	16.31	15.81	14.98	14.30	14 05	13.66

Bestimmen Sie den Median und die 16%/84%-Qantile, außerdem Mittelwert und Streuung. Stellen Sie die Daten als Balkendiagramm dar mit Klassen der Breite 1 und ganz- bzw. halbzahligen Klassenmitten.

A 1.5.2: Auf einer Straße wurden 1986 in England folgende Abstände (in Sekunden) zwischen aufeinanderfolgenden Fahrzeugen gemessen (aus [Ha] S. 3):

12 2 6 2 19 5 34 4 1 4 8 7 1 21 6 11 8 28 6 4
5 1 18 9 5 1 22 1 1 5 3 14 5 3 4 5 1 3 16 2.

Bestimmen Sie Median, Mittelwert, Streuung und die 5%/95%-Quantile.

A 1.5.3: Würfeln Sie 120 mal und notieren Sie die Augenzahlen (in Gruppen zu je 12 Werten) und für jede Zwölfergruppe die Anzahl x_i der Sechsen. Stellen Sie das Ergebnis grafisch dar und bestimmen Sie Mittelwert und Streuung.

A 1.5.4: (a) Notieren Sie in der Würfel-Serie von Aufgabe A 1.5.3 die Nummern $k_1, \ldots, k_{10}$ der ersten zehn gewürfelten Sechsen (notfalls weiterwürfeln) und deren Abstände $d_1 = k_1$, $d_2 = k_2 - k_1$, $d_3 = k_3 - k_2$, ... Stellen Sie auch dieses Ergebnis grafisch dar. Mittelwert? Streuung?

(b) Notieren Sie außerdem die Nummer m_1 der letzten Sechs *vor* Nr. 24 und die Nummer n_1 der ersten Sechs *ab* Nr. 24 und den Abstand $D_1 := n_1 - m_1$. Wiederholen Sie dies an den Stellen 48, 72 und 96. Vergleichen Sie die Werte D_i mit den Werten d_i aus (a).

A 1.5.5: (a) Stellen Sie den folgenden zweidimensionalen Datensatz grafisch dar:

(6.2,4.5),(3.7,3.6),(8.5,3.5),(3.5,5.1),(4.8,4.6),(6.7,2.9),(7.8,4.4),(5.4,2.4),
(4.8,3.7),(9.8,3.6),(2.5,4.3),(2.6,5.8),(6.8,3.7),(5.2,3.4),(7.4,4.7).

(b) Bestimmen Sie die Mittelwerte, Streuungen und die Regressionsgerade. und tragen Sie diese in die Grafik ein.

(c) Wiederholen Sie (b), nachdem Sie die Rolle von x und y vertauscht haben, und vergleichen Sie die Ergebnisse. Haben Sie eine Erklärung?

A 1.5.6: Die folgenden Daten geben das Alter (in Jahren) und die Höhe (in cm) von japanischen Kiefer-Sämlingen an (aus [Ha] S. 199):

(9, 80) (3, 8) (5, 52) (7, 63) (5, 28) (9, 95) (5, 51) (2, 6) (3, 13)

(6, 60) (3, 8) (1, 3) (1, 3) (8, 65) (3, 5) (8, 42) (8, 85) (9, 66)
(3, 15) (3, 12) (6, 67) (4, 30) (3, 14) (5, 56) (3, 15).

Stellen Sie die Daten grafisch dar und bestimmen Sie die Regressionsgerade.
Ist die Approximation durch eine Gerade sinnvoll?

A 2.2.1: Man formuliere für die folgenden Mess- oder Beobachtungsgrößen einen geeigneten Merkmalraum – und dessen Bedeutung.
(a) Die Laufzeit eines Briefes.
(b) Die Profiltiefe eines Autoreifens.
(c) Die (tatsächliche) Bauzeit eines Tunnels.
(d) Die Qualitätsstufen eines Bauteils.

A 2.3.1: Eine Firma hat 5 externe Telefonanschlüsse. Man beschreibe die mögliche momentane Belegung durch einen Merkmalraum
(a) ohne, (b) mit Unterscheidung der einzelnen Leitungen.

A 2.3.2: Die Qualität von 100 Bauteilen werde geprüft. Jedes Teil werde als „sehr gut", „gut", „brauchbar" oder „Ausschuss" eingestuft.
Man formuliere einen geeigneten Merkmalraum
(a) für ein Fertigungsprotokoll (Stück für Stück, um Störungen zu erkennen),
(b) für das zusammengefasste Gesamtergebnis.

A 2.3.3: Zur Überprüfung der Telefonkosten soll die Zahl der Telefongespräche eines Tages und die Dauer jedes Gesprächs festgehalten werden.
Man formuliere dazu einen geeigneten Merkmalraum.

A 2.3.4: In einer KFZ-Werkstatt arbeiten 4 Personen an 5 Fahrzeugen, evtl. mehrere an einem Auto. Man beschreibe die momentane Arbeitsverteilung durch jeweils einen geeigneten Merkmalraum, wenn direkt ablesbar sein soll:
(a) für jeden Mitarbeiter die ihm zugewiesene Aufgabe,
(b) für jedes Fahrzeug die Zahl der daran beschäftigten Personen,
(c) für jedes Fahrzeug die daran beschäftigten Personen. **A 2.3.5:** In einer Fertigungshalle werden zwei Typen von Werkstücken nacheinander einzeln an drei Maschinen bearbeitet. Bei jeder Maschine befinden sich (genügend viele) Warteplätze. Von jedem Typ sind höchstens 10 Stück in der Halle. Man beschreibe die momentan an (bei und in) den Maschinen vorhandenen Stückzahlen durch einen Merkmalraum
(a) ohne, (b) mit Unterscheidung der Typen.

A 2.4.1: Man überprüfe die Richtigkeit der folgenden Mengen-Gleichungen und formuliere gegebenenfalls Zusatzbedingungen, unter denen die Aussagen stimmen:
(a) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus BC$,
(b) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$,
(c) $(A \cup B)(A^c \cup B) = AB$.

Man benutze bei jedem der Teile (a), (b), (c) die graphische Darstellung *und* die Rechenregeln für Mengen.

A 2.4.2: (A_n, $n = 1, 2, \ldots$) seien Teilmengen von Ω. Man schreibe die folgende Formel für $N = 2$ und $N = 3$ in ausführlicher Form (z.B. $A_1 \cup A_2 = \ldots$) und beweise sie für beliebiges N. Gilt die Formel auch für $N=\infty$?

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \sum_{n=1}^{N} (A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i).$$

A 2.4.3: A, B, C und $A_1, A_2, \dots$ seien Teilmengen von Ω. Man zeige:
(a) $1_A = 1 - 1_{A^c}$, (b) $1_{\bigcap_i A_i} = \Pi_i 1_{A_i} = \min_i 1_{A_i}$,
(c) $1_{\sum_i A_i} = \sum_i 1_{A_i}$, (d) $1_{\bigcup_i A_i} = \max_i 1_{A_i}$,
(e) $1_{A\cup B\cup C} = 1_A + 1_B + 1_C - 1_{AB} - 1_{AC} - 1_{BC} + 1_{ABC}$.
Bei (e) benutze man (a) und (b).

A 2.4.4: Die Anforderungen eines Rechenprogramms seien mit Stichprobenraum Ω modelliert. (Ω muss hier ausnahmsweise nicht spezifiziert werden.)
Es seien A (bzw. B bzw. C) die folgenden Ereignisse in Ω:
„das Programm benötigt einen Drucker (bzw. einen Plotter bzw. ein Bandgerät)“.
Man stelle die folgenden Aussagen durch Mengenoperationen dar.
(a) „das Programm benötigt mindestens eines der drei Ausgabemedien“,
(b) „das Programm benötigt höchstens zwei der drei Ausgabemedien“,
(c) „das Programm benötigt genau zwei der drei Ausgabemedien“,
(d) „das Programm benötigt genau eines der drei Ausgabemedien nicht“.

A 2.4.4: Jemand möchte sein gebrauchtes Auto verkaufen und erhält fünf Angebote. Jedes Angebot (in Euro) liegt in $\Omega_1 := \{5000, 6000, 7000, 8000, 9000\}$.
Man gebe möglichst explizit die folgenden Ereignisse in $\Omega := {\Omega_1}^5$ an:
$A :=$ „kein Angebot liegt über 8000 Euro“,
$B :=$ „alle Angebote betragen mindestens 7000 Euro“,
$C :=$ „der Durchschnitt aller Angebote ist 8400 Euro“.
Wieviele Elemente haben A, B und C jeweils?

A 2.4.5: Eine Zielscheibe sei in $\mathbb{R}^2$ dargestellt durch konzentrische Kreise um $(0,0)$ mit den Radien $1, 2, \dots, 10$ cm und von innen nach außen numeriert durch $10, 9, \dots, 2, 1$, außerhalb sei „0“. Ein Treffer werde durch $\omega \in \Omega = \mathbb{R}^2$ modelliert.
Man beschreibe folgende Ereignisse in Ω und in $\Omega' := \{0, 1, \dots, 10\}$:
$A :=$ „die Ringnummer ist mindestens 8“,
$B :=$ „die Ringnummer liegt zwischen 3 und 5“.

A 2.4.6: Beim Brennen von 50 Stücken empfindlicher Keramik gebe es die vier Qualitäts-Stufen 0, 1, 2, 3. Man bestimme in einem geeigneten Merkmalraum die Mengen, welche die folgenden Ereignisse repräsentieren:
$A_n :=$ „das n-te Stück hat Qualitäts-Stufe 3“,
$B_n :=$ „das n-te Stück ergibt das erste Mal Stufe 3“.
$C_n :=$ „das n-te und $(n+1)$-te Stück sind die ersten beiden mit Stufe 3“,
$D :=$ „es tritt genau einmal die Stufe 3 auf“.
Lassen sich B_n, C_n und D durch die A_i ausdrücken?
Man drücke $E_m := \bigcup_{n=1}^m A_n$ $(1 < m \le 50)$ durch die B_i aus.

A 2.5.1: Man zeige, dass der Durchschnitt von beliebig vielen σ-Algebren über Ω wieder eine σ-Algebra ist (vgl. Def. **??**).

A 2.5.2: Es sei $\Omega = \{0,1\}^2$. Man zeige, dass das Mengensystem $\mathcal{E}$, bestehend aus $\emptyset, \Omega, A := \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$ und $B := \{(0,0), (0,1)\}$, nicht abgeschlossen ist.

Welche σ-Algebra $\mathcal{A}$ wird von $\mathcal{E}$ erzeugt? Ist $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$?
Man versuche, alle Elemente von $\mathcal{A}$ durch A und B auszudrücken.
A 2.5.3: Man zeige, dass die Borel-σ-Algebra $\mathbb{B}$ auch vom System $\mathcal{G}_1^o$ der offenen Intervalle erzeugt wird. Dazu beweise man: $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}(\mathcal{E}') \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{E}')$.
A 2.6.1: Man formuliere Die Ereignisse A, B, C aus Aufgabe 2.4.4 mit Hilfe der Zufallsvariablen X_i := „Betrag des Angebots i“, $1 \leq i \leq 5$.
A 2.6.2: Man beschreibe die Ereignisse A und B aus Aufgabe 2.4.5 mit einer geeigneten Zufallsvariable $Y : \Omega \to \Omega'$.
A 2.6.3: Man formuliere die Ereignisse aus Aufgabe 2.4.6 durch die Zufallsvariablen X_n := „Qualitätsstufe des n-ten Stücks“.
A 2.7.1: Ein Pixel einer Grafik habe (zur Vereinfachung) 16 Farb- und 16 Graustufen (0,1,...,15). Jede der 256 Kombinationen sei gleich häufig vertreten. Für ein „zufällig“ herausgegriffenes Pixel sei X die Farbe und Y die Graustufe.
Man formuliere ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell und berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
(a) $\{X = 3\}$, (b) $\{Y \neq 4\}$, (c) $\{X \neq Y\}$, (d) $\{X > Y\}$,
(e) $\{X + Y = 9\}$, (f) $\{X > 4 \text{ und } Y > 4\}$, (g) $\{X > 4 \text{ oder } Y > 4\}$“.
A 2.7.2: Zwei Sportschützen schießen nacheinander auf eine Scheibe mit 10 Ringen. Unter der Voraussetzung, dass alle möglichen Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, formuliere man ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell.
Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass
(a) beide mindestens 7 Punkte erzielen, (b) mindestens einer 9 Punkte erreicht,
(c) die beiden Punktezahlen höchstens um 1 differieren?
A 2.8.1: Ein (zufällig herausgegriffener) PC besitze mit Wahrscheinlichkeit 0,5 eine Festplatte mit mindestens 50 GB, mit Wahrscheinlichkeit 0,3 einen Flachbildschirm und mit Wahrscheinlichkeit 0,2 beide Eigenschaften.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine dieser Eigenschaften zu besitzen? Welche Formel ist hierfür geeignet?
A 2.9.1: Bei einem schriftlichen Test werden „Multiple-Choice“-Fragen gestellt, bei denen von je 3 vorgegebenen Antworten genau eine richtig ist.
Man nehme an, dass ein(e) Teilnehmer(in) mit Wahrscheinlichkeit 25% (bzw. 70%) auf jede der Fragen die richtige Antwort weiß und sonst zufällig ankreuzt.
Unter Verwendung von bedingten Wahrscheinlichkeiten bestimme man für eine einzelne Frage
(a) die Wahrscheinlichkeit, dass die richtige Antwort angekreuzt wird,
(b) die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass er bzw. sie bei einer richtig angekreuzten Antwort diese auch tatsächlich wusste.
A 2.9.2: Ein Bluttest ergebe bei erkrankten Personen mit einer Sicherheit von 96% ein positives Ergebnis, bei gesunden Personen mit 94% ein negatives. Im Durchschnitt sei jede 145-ste Person befallen.
(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Versuchsperson, die ein positives Testergebnis erhält, auch wirklich krank ist?
(b) Wie groß ist bei negativem Ausgang die Wahrscheinlichkeit, trotzdem krank zu sein?
A 2.9.3: (a) Man zeige, dass mit A und B auch A^c und B stoch. unabhängig sind.

(b) Man zeige, dass mit A, B, C auch A^c, B, C (bzw. A^c, B^c, C bzw. A^c, B^c, C^c) stoch. unabhängig sind.

A 2.9.4: Man zeige, dass bei zweimaligem Werfen einer (unverfälschten) Münze die Ereignisse A_1 := „der erste Wurf ergibt ‚Kopf'“, A_2 := „der zweite Wurf ergibt ‚Kopf'“ und A_3 := „beide Würfe sind verschieden“ paarweise, aber nicht allgemein stochastisch unabhängig sind (vgl. Beispiel **??**).

A 3.1.1: Bei einer Tagesproduktion von 100 Bauteilen werde die Anzahl der fehlerhaften Stücke durch eine Binomial-Verteilung mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}01$ modelliert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) kein Stück, (b) genau ein Stück, (c) mehr als ein Stück defekt ist?

A 3.1.2: Die Wartezeit an einem Schalter (in Minuten) werde mit $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und der geometrischen Z-Dichte $f(k) = (1-q)q^k,\ k \in \Omega$ mit $q = 0{,}9$ modelliert.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens $n = 2$ (bzw. 3 bzw. 4) Minuten warten muss? Man berechne die Wahrscheinlichkeit auch für beliebiges n und q. (Es ergibt sich eine einfache Formel.)// **A 3.2.1:** Eine Leiste von 3 m Länge sei an einer zufälligen Stelle durchgebrochen. Unter der Annahme einer stetigen Gleichverteilung bestimme man die Wahrscheinlichkeit, dass man noch ein Stück von 2 m Länge abschneiden kann. Man beschreibe das betrachtete Ereignis als Teilmenge des Merkmalraums Ω.

A 3.2.1: Eine Firma will Rechenzeit bei einem Rechenzentrum kaufen. Der (zufällige) wöchentliche Bedarf (in Stunden) besitze eine R-Dichte

$$f(x) = c\,(x-1)(3-x),\ 1 < x < 3,\ \text{sonst } 0.$$

(a) Wie groß ist c ? Man skizziere $f(x)$.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 2,5 Stunden benötigt werden?

A 3.2.2: Zu welchen der in Abschnitt **??** angegebenen Verteilungstypen und zu welchen Parametern gehören die folgenden R-Dichten:

(a) $f(x) = c_1\, x\, e^{-3x}\, 1_{[0,\infty)}(x),\ x \in \mathbb{R},$ (b) $f(x) = c_2\, e^{-(x+1)^2/8}\ \ x \in \mathbb{R}.$

Man bestimme die Werte c_1 und c_2 .

A 3.3.1: Man bestimme und skizziere die Verteilungsfunktion der Binomial-Verteilung mit den Parametern $n = 2$ und $p = 0{,}6$. Welche Werte hat die Verteilungsfunktion an den Stellen $x = 0,\ 0{,}5,\ 0{,}99,\ 1{,}0,\ 1{,}01,\ 2{,}0$ und $3{,}0$?

A 3.3.2: Man bestimme und skizziere die Verteilungsfunktionen für die Verteilungen aus den Aufgaben A 3.1.2 und A 3.2.2.

A 3.3.3: Der Messfehler eines Messgeräts setze sich zusammen aus einem systematischen (konstanten) Fehler von 0,2 ME (Maßeinheiten) und einem normalverteilten symmetrischen Fehler mit Streuung 0,1 ME.

(a) Welche Verteilung besitzt der Gesamtfehler (Typ und Parameter)?

(b) Man berechne einige Werte der Verteilungsfunktion F (mit Hilfe der Tabelle für $\Phi(x)$) und skizziere damit den Verlauf von F.

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Betrag des Messfehlers $\leq 0{,}05$ ($> 0{,}5$)?

A 3.3.4: Die Lebensdauer einer Glühlampe (in Stunden) sei exponential-verteilt mit Parameter $\alpha = 1/400$. Es sei A_t das Ereignis „Die Glühlampe brennt mindestens t Stunden“.

(a) Man berechne die Wahrscheinlichkeit von A_t für $t = 200,\ 600,\ 800$.

(b) Wie wahrscheinlich ist eine Lebensdauer zwischen 600 und 800 Stunden?

(c) Wie ändert sich die Verteilungsfunktion, wenn die Glühlampe planmäßig nach 600 Stunden ausgewechselt und entsorgt wird?
A 4.1.1: Man bestimme mit Hilfe eines möglichst einfachen Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, dass bei dreimaligem Würfeln (a) drei verschiedene Zahlen, (b) mindestens zwei verschiedene Zahlen geworfen werden.
A 4.1.2: Bei der Lotterie „Glücksspirale“ wurde 1971 die 7-stellige Losnummer für den Hauptgewinn dadurch ermittelt, dass aus einer Trommel mit 70 Kugeln, von denen je 7 die Ziffern 0 bis 9 trugen, nacheinander 7 Kugeln ohne Zurücklegen „gezogen“ wurden. Die Lose wurden vorher offen verkauft.
Man berechne die Wahrscheinlichkeit, den 1. Preis zu gewinnen, für die Losnummern (a) 3 333 333, (b) 1 234 567, (c) 1 231 231.
(Das Ziehungsverfahren wurde nach der ersten Ziehung geändert.)
A 4.2.1: Ein Handwerker benötige zur Reparatur einer Waschmaschine zwischen 10 und 40 Minuten (stetig gleichverteilt). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zwei Geräte in einer Stunde schafft (Ereignis A), (a) wenn die Zeiten für beide Geräte unabhängig sind, (b) wenn er, falls die erste Reparatur unter 30 Minuten gedauert hat, vor der zweiten Reparatur eine Pause von 10 Minuten macht. Man gebe in beiden Fällen eine R-Dichte in $\mathbb{R}^2$ an und skizziere das Ereignis A.
A 4.2.2: In den täglichen Abgasen einer Müllverbrennungsanlage sei x_1 die Menge der Schwebstoffe vor der Inbetriebnahme einer zusätzlichen Abgasreinigung und x_2 die Menge danach (in Tonnen). Unter der Voraussetzung, dass x_1 durch eine Beta$(3,1)$-Verteilung modelliert werden kann und x_2 gleichverteilt zwischen 0 und $x_1/2$ ist, bestimme man (a) die R-Dichte für ein Modell des Gesamtversuchs,
(b) die Wahrscheinlichkeit, dass nach Inbetriebnahme noch mehr als 0,3 t Schwebstoffe anfallen.
A 4.3.1: Die Lebensdauer von Glühlampen (in Stunden) sei unabhängig voneinander normalverteilt mit Mittelwert 500 und Streuung 100.(Man überlege, warum negative Werte der Normalverteilung vernachlässigt werden können.) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass von fünf geprüften Glühbirnen
(a) die ersten drei Stücke über 600 Stunden und der Rest unter 600 Stunden brennt,
(b) wenigstens ein Stück eine Brenndauer von über 700 Stunden hat.
A 4.3.2: 6 Werkstücke werden zur Bearbeitung zufällig und unabhängig voneinander auf 3 Maschinen verteilt. Man formuliere ein geeignetes W-Modell. Wieviele Elemente hat Ω ?
Man beschreibe die folgenden Ereignisse im Modell und bestimme ihre Wahrscheinlichkeit:
A_{ij} := „Maschine 1 bekommt genau die Werkstücke i und j zugeteilt“,
A := „Maschine 1 bekommt genau 2 Stücke zugeteilt“. **A 4.3.3** (Fortsetzung von A 4.3.2): In der Situation der vorangehenden Aufgabe sei B das Ereignis „Maschine 2 bekommt genau 2 Stücke zugeteilt“ und $B_{k\ell}$ sei analog zu A_{ij} definiert. Man bestimme die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B_{k\ell}|A_{ij})$ und $P(B|A_{ij})$ und daraus $P(AB)$ und $P(B|A)$.
A 4.4.1: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einem Drei-Tage-Urlaub
(a) drei Sonnentage, (b) höchstens einen Regentag zu erleben.
Man gehe davon aus, dass das Wetter regnerisch/ bewölkt/ sonnig sein wird
– am ersten Tag mit Wahrscheinlichkeit 0,3/ 0,3/ 0,4,
– nach einem Regentag mit Wahrscheinlichkeit 0,5/ 0,2/ 0,3,

– nach bewölktem Wetter mit Wahrscheinlichkeit 0,4/ 0,3/ 0,3,
– nach einem Sonnentag mit Wahrscheinlichkeit 0,1/ 0,3/ 0,6.
Man formuliere dazu ein geeignetes (mehrstufiges) Modell.

A 4.4.2: Angenommen Sie bestehen die vier Teilprüfungen zum Vordiplom unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}95$.
(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie höchstens eine Prüfung (beim ersten Versuch) nicht bestehen?
(b) Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit, wenn nach einer nichtbestandenen Prüfung die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der nächsten Prüfung um 20% sinkt?

A 4.5.1: Aus 50 Bauteilen, von denen 5 defekt seien, werden 6 Teile zufällig entnommen, und zwar *ohne* Zurücklegen. In einem passenden W-Modell bestimme man die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
$A :=$ „genau die ersten drei gezogenen Teile sind defekt",
$B :=$ „genau die letzten drei gezogenen Teile sind defekt",
$C :=$ „genau drei der gezogenen Teile sind defekt",
$D :=$ „höchstens drei der gezogenen Teile sind defekt".

A 4.5.2: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(A_n)$, dass unter n Personen mindestens zwei am selben Datum (Tag, Monat) Geburtstag haben? Man vernachlässige den 29. Februar und nehme eine Gleichverteilung an.
(a) Man versuche, den Wert von $P(A_n)$ für $n = 25$ und 50 zu schätzen.
(b) Man berechne $P(A_n)$ (oder $P({A_n}^c)$) in einem geeigneten Modell.

A 4.6.1: Man berechne für die Situation von Aufgabe A 4.5.1 die Wahrscheinlichkeit, dass (a) das zweite und dritte, (b) das dritte und vierte gezogene Stück defekt ist.

A 5.1.1: Die fünf Angebote für einen gebrauchten Computer in Aufgabe A 2.4.5 seien als Zufallsvariable $X_1, X_2, \ldots, X_5$ dargestellt. Man beschreibe die dort angegebenen Ereignisse A, B und C durch X_1 bis X_5.

A 5.1.2: Man zeige, dass in jedem W-Modell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ jede Indikatorfunktion 1_A eine Zufallsvariable ist, falls A aus $\mathcal{A}$ ist (vgl. Folg. **??** (b)).

A 5.2.1: Aus fünf nummerierten Geräten werden zwei zufällig entnommen. Man bestimme für die beiden Fälle (a) mit Zurücklegen und (b) ohne Zurücklegen die Verteilungen der Summe und des Abstands der beiden Nummern.

A 5.2.2: Ein (echter) Würfel werde $n = 5$-mal geworfen. Y sei das Maximum der geworfenen Augenzahlen. (a) Man gebe ein geeignetes Modell an. (b) Man berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A_k :=$ „die maximale Augenzahl ist nicht größer als k". (c) Mit Hilfe von (b) bestimme man die Verteilung (Z-Dichte) von Y. Was ergibt sich für einen beliebigen Wert n ?

A 5.2.3: Bei der gleichzeitig begonnenen Reparatur von n Geräten seien die Reparaturzeiten voneinander unabhängig und stetig gleichverteilt zwischen 0 und einer Stunde (= 1). In einem geeigneten Modell sei Y der (früheste) Zeitpunkt, zu dem alle Reparaturen beendet sind. Man bestimme die Verteilungsfunktion F^Y und anschließend die R-Dichte f^Y (man beachte, dass F^Y die Stammfunktion zu f^Y ist). Von welchem Typ ist diese Verteilung?

A 5.2.4: Bei einer Maschine können zwei Bauteile nach einer gewissen Laufzeit ausfallen. Die beiden Lebensdauern T_1 und T_2 seien unabhängig und exponentialverteilt mit den

Parametern α_1 und α_2. Y sei der Zeitpunkt, zu dem das erste der beiden Bauteile ausfällt. Man bestimme die Verteilungsfunktion von Y (besser zuerst $1 - F^Y$). Wie heißt die Verteilung von Y ?

A 5.3.1: Ein Kunde vereinbart mit seinem Lieferanten, dass er eine Lieferung von 200 Stück zurückgehen lässt, falls bei einer zufälligen Stichprobe von 20 Stück mehr als ein Stück defekt ist. Unter der Annahme, dass genau 10 der 200 Stücke defekt sind, bestimme man die Wahrscheinlichkeit für eine Rücksendung aufgrund der Stichprobe. Man setze eine Stichprobenentnahme (a) mit Zurücklegen (b) ohne Zurücklegen voraus.

A 5.3.2: Der Fischbestand N eines Teiches soll geschätzt werden. Dazu fängt man 100 Fische, markiert sie und setzt sie wieder ins Wasser. Eine Woche später fängt man z.B. 20 Fische und findet darunter 6 markierte. (a) Man beschreibe den Vorgang durch ein geeignetes Modell. (b) Welchen Fischbestand würden Sie schätzen? (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P^{(N)}(A)$ für das Ereignis $A :=$ „unter den 20 gefangenen Fischen sind 6 markierte“, wenn der Gesamtbestand $N = 250, 300, 400$ ist? (d) Für welchen Gesamtbestand N ist $P^{(N)}(A)$ maximal? (Lösung numerisch oder mit $P^{(N)}(A)/P^{(N-1)}(A)$.)

A 5.4.1: Das Eintreffen von Kunden an einem Schalter werde durch ein n-faches Bernoulli(p)-Modell mit $p = 0{,}1$ und Taktlänge $= 1$ Minute beschrieben. (a) Welche Verteilung besitzt dann die Anzahl der innerhalb einer Stunde ankommenden Kunden? (b) Man approximiere diese Verteilung durch eine Poisson-Verteilung. (c) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 3 Kunden ankommen.

A 5.5.1: Man approximiere die Verteilung aus Teil (a) von Aufgabe A 5.4.1 durch eine Normalverteilung. Man berechne auch hierfür die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 3 Kunden ankommen.

A 5.6.1: Jemand steht an einer Straße und wartet auf ein Taxi. Die Wartezeit W_1 (in Minuten) sei Geo$^+(0{,}2)$-verteilt. (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach 5 Minuten noch kein Taxi da ist? (b) Wie groß ist unter der Bedingung, dass nach 10 Minuten immer noch kein Taxi angekommen ist, die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass sie/er nochmals mehr als 5 Minuten warten muss? Interpretieren Sie das Ergebnis im Vergleich zu (a). Warum konnte man dieses Ergebnis erwarten?

A 5.7.1: Die Bedienzeit an einem Schalter (in Minuten) sei Nb$^+(3\,, 0{,}4)$-verteilt. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die Bedienung mehr als fünf bzw. zehn Minuten dauert.

A 5.7.2: Man zeige, dass die Negative Binomialverteilung auch für nicht-ganzzahlige Werte von r mit $r > 0$ definiert ist, indem man $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{nb}^0(r, p\,; k) = 1$ mit Hilfe der Taylorreihe für $h(q) := (1-q)^{-r}$ nachrechnet.

A 5.8.1: Die Verteilung der Bauzeit Z einer Brücke sei vom Typ einer Beta$(4, 3)$-Verteilung, aber über dem Intervall [1 Jahr, 3 Jahre]. Man bestimme durch lineare Transformation die R-Dichte von Z.

A 5.8.2: Die Zufallsvariable X sei exponential$(1/2)$-verteilt. Man zeige, dass dann die Zufallsvariable $Y := \sqrt{X}$ die Verteilungsfunktion $F^Y(y) = (1 - e^{-y^2/2})\, 1_{[0,\infty)}(y)$ besitzt, und bestimme die zugehörige R-Dichte.
(Die Verteilung von Y gehört zu den sog. *Weibull-Verteilungen*, die durch die Verteilungsfunktionen $F(y) := (1 - e^{-\alpha\, y^\beta})\, 1_{[0,\infty)}(y)$ mit $\alpha, \beta > 0$ bzw. durch die entsprechende R-Dichte definiert werden. Diese Verteilungen eignen sich zur Modellierung von Lebens-

dauerverteilungen.)

A 5.8.3: Man zeige: Die Höhe eines festen Punktes der Lauffläche eines Rades (mit Durchmesser 1) über der Straße zu einem zufälligen Zeitpunkt ist Be$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-verteilt. (Der Drehwinkel des Rades sei dabei $\mathcal{R}(0, 2\pi)$-verteilt.)

A 5.9.1: Einem Produkt werden bei einer Qualitätsprüfung die beiden Merkmale $X \in \{1, 2, 3\}$ (z.B. für Funktion) und $Y \in \{1, 2, 3, 4\}$ (z.B. für Handhabung) zugewiesen, und zwar mit den in der folgenden Tabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten. Man bestimme die Verteilungen (bzw. Z-Dichten) von X und Y. (b) Man prüfe, ob X und Y stochastisch unabhängig sind.

	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$
$x = 1$	0,05	0,11	0,07	0,01
$x = 2$	0,08	0,20	0,13	0,06
$x = 3$	0,03	0,13	0,09	0,04

A 5.9.2: Man bestimme für ein n-faches Bernoulli(p)-Experiment (a) die gemeinsame Verteilung von W_1 (der Wartezeit auf den ersten Erfolg) und S_n (der Gesamtzahl der Erfolge), (b) die bedingte Wahrscheinlichkeit von $\{W_1 = k\}$ unter der Bedingung, dass insgesamt genau ein Erfolg eingetreten ist.

A 5.9.3: Man vergleiche die Ergebnisse der folgenden beiden Teilaufgaben (ganz unterschiedlicher Art) und interpretiere die Beobachtung:

(a) Beim zweimaligen Ziehen ohne Zurücklegen aus den Zahlen 1 bis 10 sei X das Minimum und Y das Maximum der beiden Zahlen. Man bestimme die gemeinsame Verteilung von X und Y.

(b) In einem n-fachen Bernoulli(p)-Experiment mit $n = 10$ bestimme man die bedingte Wahrscheinlichkeit von $\{W_1 = k,\ W_2 = \ell\}$ unter der Bedingung, dass die Zahl der Erfolge $S_{10} = 2$ ist (zu W_1, W_2 vgl. Aufg. 5.9.2 u. Abschn. $5.6 + 5.7$).

A 5.9.4: An einem Rechner treffen von 10.00 bis 10.01 Uhr Aufträge ein, deren Anzahl X_1 Poisson(5)-verteilt sei. Die Aufträge sind (unabhängig voneinander) mit Wahrscheinlichkeit 0,6 vom Typ 1 und mit Wahrscheinlichkeit 0,4 vom Typ 2. Y_1 (bzw. Y_2) sei die Zahl der Aufträge vom Typ 1 (bzw. vom Typ 2).

(a) Man zeige, dass die bedingte Verteilung der ZV Y_1 unter der Bedingung $\{X_1 = n\}$ eine Binomial(n, p)-Verteilung ist.

(b) Man formuliere ein 2-stufiges Modell für (X_1, Y_1).

(c) Man bestimme die gemeinsame Verteilung von Y_1 und Y_2.

(d) Man bestimme die Verteilungen von Y_1 und Y_2. Wie heißen diese Verteilungen? Was kann man aus (c) und (d) folgern?

A 5.10.1: Man bestimme für die Zufallsvariablen X und Y aus Aufgabe A 5.9.1 die bedingte Z-Dichte von Y unter Kenntnis von X. Sind X und Y stochastisch unabhängig?

A 5.10.2: Eine Maschine produziere nacheinander n Werkstücke, die unabhängig voneinander die Güteklassen 1, 2 und 3 besitzen, und zwar mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 0,7$, $p_2 = 0,2$ und $p_3 = 0,1$. Es sei Y_i die (zufällige) Anzahl der Stücke mit Güteklasse i $(i = 1, 2, 3)$. Es gilt also $Y_1 + Y_2 + Y_3 = n$. (a) Man modelliere das Fertigungsprotokoll (mit Z-Dichte f). (b) Man zeige, dass das Ereignis $\{Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, Y_3 = y_3\}$ stets $n!/(y_1!y_2!y_3!)$ Elemente besitzt. (c) Man bestimme die gemeinsame Z-Dichte von

Y_1, Y_2, Y_3. (d) Man bestimme die Z-Dichte von Y_2 und die bedingte Z-Dichte von Y_3 unter Y_2 und interpretiere das Ergebnis.

A 5.10.3: Man zeige unter Verwendung (und Verallgemeinerung) von Aufgabe A 2.8.3, dass die stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ und der Zufallsvariablen $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ äquivalent ist (Folgerung **??**).

A 5.11.1: Die Lebensdauern T_1 und T_2 von 2 Maschinen seien $\mathrm{Geo}^0(p)$-verteilt und unabhängig. (Modell?) Wenn die erste Maschine ausfällt, wird die zweite eingeschaltet. Man bestimme die Verteilung der Gesamtlaufzeit der Maschinen. Wie heißt diese Verteilung?

A 5.11.2: An einer Straßeneinmündung kommen aus zwei Richtungen Fahrzeuge an. Die Anzahlen (X_i) der aus Richtung i in einer Minute ankommenden Fahrzeuge seien unabhängig voneinander Poisson(λ_i)-verteilt, $i = 1,\ 2$. (a) Für $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 5$ bestimme man die Verteilung der insgesamt ankommenden Fahrzeuge. (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in Straße 1 genau k Fahrzeuge angekommen, falls die Gesamtzahl n beobachtet wurde?

A 5.11.3: Die Angebotspreise zweier Großbauvorhaben seien stochastisch unabhängig und $\mathcal{N}(15\,,9)$- bzw. $\mathcal{N}(40\,,16)$-verteilt (in Mio. DM). Man bestimme die Verteilung des Gesamtpreises. (Wie groß ist die Streuung?)

A 5.11.4: Bei zwei Messungen an einem Maschinenteil seien die Messfehler X und Y unabhängig und jeweils $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt (z.B. in 1/10 mm). Man zeige (ohne Rechnung), dass dann die Summe der Fehlerquadrate exponentialverteilt ist (mit welchem Parameter?).

A 6.1.1: Die Bearbeitungsdauer T eines Werkstücks sei auf den ganzen Zahlen von $a = 10$ bis $b = 22$ gleichverteilt. Man bestimme alle Mediane sowie die 10%- und 90%-Quantile. Was ändert sich bei den Medianen für $a = 11$?

A 6.1.2: Man bestimme die Modalwerte, Mediane, 10%- und 90%-Quantile der folgenden Verteilungen der Fehlerzahl in einem Diktat: (a) B(100, 0,03), (b) $\pi(3)$, (c) $\mathrm{Nb}^+(3,\ 0{,}8)$. Man vergleiche (a) und (b).

A 6.1.3: Eine Wartezeit werde entweder (a) durch eine $\mathrm{Geo}^0(0{,}2)$-Verteilung oder (b) durch eine Exp(0,2)-Verteilung modelliert. Man bestimme die Mediane, die Quartile sowie die 5%- und 95%-Quantile. (c) Man suche einen Parameter der Exponentialverteilung, für den diese Werte näherungsweise übereinstimmen.

A 6.3.1: Man bestimme die Erwartungswerte der Verteilungen aus den Aufgaben A 6.1.1 und A 6.1.2 und vergleiche die Erwartungswerte mit den Medianen.

A 6.3.2: Die Maßabweichung Y einer Maschinenwelle (in Hundertstel-Millimeter) soll durch eine Zähl-Dichte $f^Y(k) = c \cdot (0,3)^{|k|}$ auf $\mathbb{Z}$ beschrieben werden. (a) Man bestimme die Konstante c. (b) Man berechne und skizziere $f^Y(k)$ für einige Werte von k. (c) Man berechne die Erwartungswerte von Y und $|Y|$.

A 6.3.3: Die Z-Dichte f^Y aus Aufgabe A 6.3.2 soll ersetzt werden durch die Zähl-Dichte $f^Y(k) = c/(|k|(|k|+1))$, falls $k \neq 0$, $f^X(0) = 0$ (ebenfalls auf $\mathbb{Z}$). Man bestimme c, $E|Y|$ und EY. Hinweis: Es ist $1/(k(k+1)) = 1/k - 1/(k+1)$.

A 6.3.4: Bei der Bearbeitung eines Werkstücks treten Abweichungen X vom Sollwert auf, und zwar die Werte -0,3/-0,2/-0,1//0,0/0,1/0,2 mit den Wahrscheinlichkeiten 0,05/0,1/0,25//0,4/0,15/0
Man bestimme den Erwartungswert der quadratischen Abweichung X^2. Benötigt man dazu die Verteilung von X^2?

A 6.3.5: In einer Werkstatt seien die Bearbeitungskosten $C(k)$ für die innerhalb eines Arbeitstages von 7.5 Std. ankommenden k Aufträge $C(k) = 500 + 200\,k - 2\,k^2$. Man nehme an, dass die Anzahl X_i der in der i-ten Viertelstunde ankommenden Aufträge Bernoulli(0,8)-verteilt ist und dass die X_i stochastisch unabhängig sind. Wie hoch sind die erwarteten Kosten? Man formuliere dazu ein geeignetes W-Modell. Welche Eigenschaften des Erwartungswerts können die Berechnung erleichtern? Hinweis: Es kann vorteilhaft sein, k^2 durch $k(k-1)+k$ zu ersetzen.

A 6.4.1: Eine Leiste mit einer Länge von zwei Metern sei an einer zufälligen (gleichverteilten) Stelle durchgebrochen. Mit der Methode aus Abschnitt **??** bestimme man die Verteilung der Länge des kürzeren Teilstücks und den zugehörigen Erwartungswert.

A 6.4.2: Man zeige, dass man für diskrete Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ den Erwartungswert auch mit der Formel $EX = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$ berechnen kann. Man schreibe dazu die Darstellung aus Folgerung **??** für den vorliegenden diskreten Fall um. Man wende die Formel auf eine Geo$^+(p)$-verteilte Wartezeit W an.

A 6.4.3: Für zwei Lagerbestände $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ gelte $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. (Negative Bestände bedeuten Vormerkungen.) (a) Was folgt daraus für die Werte $F^X(t)$ und $F^Y(t)$ der beiden Verteilungsfunktionen? (b) Man skizziere zwei passende Verteilungsfunktionen F^X und F^Y. (c) Man zeige $EX \leq EY$ mit Hilfe von Folgerung **??**
.

A 6.5.1: Für die Verteilungen aus den Aufgaben A 6.1.1 und A 6.1.2 bestimme man jeweils die Streuung. Man vergleiche dann die dort berechneten Quantile mit denen einer Normalverteilung, die denselben Erwartungswert und dieselbe Streuung besitzt.

A 6.5.2: Man vergleiche die Streuungen der drei Wartezeiten aus Aufgabe A 6.1.3.

A 6.5.3: Die Anzahl der Telefongespräche auf einer Fernleitung werde aufgrund verschiedener Stichproben durch eine Beta(30, 10)-Verteilung (bzw. durch eine Beta(60, 20)-Verteilung) beschrieben, die beide auf das Intervall [200, 1000] linear transformiert sind. (Bei so großen Zahlen arbeitet man besser mit stetigen Verteilungen.) Man bestimme die Mittelwerte und die Streuungen.

A 6.5.4: Von n Fertigungslosen enthalte das i-te Los zwei defekte und i intakte Stücke. Aus jedem Los wird ein Stück zufällig entnommen. X_i sei die Zahl der aus Los i entnommenen defekten Stücke. (a) Man formuliere ein geeignetes Modell. (b) Man bestimme für X_i und die Gesamtzahl S_n der gefundenen defekten Stücke Erwartungswerte und Streuungen (Zahlenwerte für $n = 2, 3, 4, 5$).

A 6.6.1: An $n = 5$ Werkstücken wurde je ein Wertepaar (x_i, y_i) gemessen wie in der folgenden Tabelle angegeben:

i	1	2	3	4	5
x_i	0,7	1,8	2,3	3,1	4,6
y_i	1,2	2,1	1,7	2,2	2,8

Unter der Voraussetzung, dass X und Y zwei ZV sind mit $P(X = x_i, Y = y_i) = 1/5$ für $1 \leq i \leq 5$, berechne man EX, EY, Str$X$, Str$Y$ und korr(X, Y). Welche Schlüsse bzgl. des Zusammenhangs zwischen den beiden Messwerten X und Y würden Sie daraus ziehen?

A 6.6.2: Aus $N = 40$ Geräten werden $n = 10$ zu Prüfzwecken zufällig ausgewählt (ohne Zurücklegen). Es sei $X_i = 1$ $(= 0)$, falls das i-te ausgewählte Gerät fehlerhaft (fehlerfrei)

ist. Die Gesamtzahl der ausgewählten fehlerhaften Geräte sei Z. Es werde angenommen, dass unter allen Geräten $K = 8$ fehlerhaft sind. (a) Man berechne EX_i, $\mathrm{Var}X_i$ und $\mathrm{Kov}(X_i, X_j)$, für $i, j = 1, \ldots, 10$. (b) Man bestimme EZ und $\mathrm{Var}Z$ als Formeln und Zahlenwerte direkt unter Verwendung von (a).
Hinweis: Nach Folgerung **??** sind die X_i austauschbar. Mit $V_1 := \mathrm{Var}X_1$ und $\mathrm{Kov}(X_i, X_j) = -V_1/(N-1)$, $i \neq j$, (zu zeigen) werden die Formeln einfacher.

A 6.6.3: Man zeige, dass in der folgenden Variante der Tabelle aus Beispiel **??** für die beiden Zufallsvariablen T (Typ) und D (Dauer) $\mathrm{Kov}(T, D) = 0$ gilt und dass sie trotzdem nicht stochastisch unabhängig sind. An welchen Stellen muss man bei gleichen Randverteilungen die Tabelle ändern, um Unabhängigkeit herzustellen.

	$d = 5$	$d = 10$	$d = 15$	$d = 20$
$t = 1$	0,05	0,07	0,05	0,03
$t = 2$	0,10	0,20	0,15	0,05
$t = 3$	0,05	0,13	0,10	0,02

A 6.6.4: In einem stark vereinfachten, einstufigen Optionsmodell muss eine ZV H durch Wahl von p und m ($\in \mathbb{R}$) so in Summanden $H = p + m \cdot Y + Z$ zerlegt werden, dass EZ^2 minimal wird. Dabei ist
– H der (zufällige) Betrag, den die Bank am Ende an den Kunden zahlen muss,
– p der Preis, den der Kunde am Anfang an die Bank zahlt (der Optionspreis),
– m die Menge an Aktien (oder Devisen), die die Bank zur Risiko-Absicherung am Anfang kauft und am Ende verkauft,
– Y die Kurssteigerung dieser Aktien und
– Z die Zuzahlung der Bank am Ende (EZ^2 heißt das „Risiko“ der Bank).
Die gemeinsame Verteilung von Y und H sei bekannt. (a) Man zeige, dass „EZ^2 minimal“ äquivalent ist zu „$EZ = 0$ und $\mathrm{Var}Z$ minimal“ und bestimme die optimalen Werte von p und m sowie den zugehörigen Wert von EZ^2 (in Abhängigkeit von EH, EY, $\mathrm{Var}H$, $\ldots$). (b) Was ergibt sich für den (einfachen) Fall, dass Y nur die Werte u und d („up“, „down“) mit Wahrscheinlichkeit q und $1 - q$ annimmt und dass $H = h(Y)$ ist? (p, m als Funktion von u, d und q)
Hinweis: H und Y lassen sich mit Hilfe einer gemeinsamen $B(q)$-ZV X ausdrücken.

A 6.7.1: An einer Tankstelle seien die Preise X und Y von 1 ℓ Benzin bzw. 1 ℓ Motoröl unabhängig voneinander $\mathcal{N}(1{,}0,\ 0{,}0025)$ bzw. $\mathcal{N}(15, 4)$-verteilt (in Euro). Von zwei Kunden kauft der erste 50 ℓ Benzin, 4 ℓ Öl und eine Zeitschrift für 3 Euro, der zweite 60 ℓ Benzin, 3 ℓ Öl und Zeitschriften für 8 Euro. Man bestimme für die beiden Rechnungsbeträge R_1 und R_2 die Erwartungswerte, die Streuungen und den Korrelationskoeffizienten.

A 6.7.2: Die Zufallsvariablen X und Y seien stochastisch unabhängig und beide $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilt. Man bestimme für die ZV $U := X + Y$ und $V := X - Y$ Erwartungswert, Varianz und Kovarianz. Welchen Schluss kann man daraus ziehen?

A 6.7.3: In einem Produktionsprozess seien gewisse Störungen Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 vorhanden, die unabhängig voneinander $\mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$-verteilt seien mit Mittelwerten $a_i = 1{,}0/1{,}0/2{,}0/3{,}0$ und Streuungen $\sigma_i = 2{,}0/1{,}0/3{,}0/2{,}0$. Außerdem gebe es Folgefehler Z_1, Z_2, Z_3, die linear von den Störungen X_i abhängen. Es gelte

$$\begin{aligned}
Z_1 &= 10 + 3Y_1 \phantom{{}- 2Y_2} + Y_3 + 2Y_4 \\
Z_2 &= 20 \phantom{{}+ 3Y_1} - 2Y_2 + 5Y_3 + 3Y_4 \\
Z_3 &= 5 \phantom{{}+ 3Y_1} + 4Y_2 \phantom{{}+ 5Y_3} - Y_4
\end{aligned}$$

Man bestimme (a) die gemeinsame Verteilung von $(Y_1, \dots, Y_4)$,
(b) die gemeinsame Verteilung von (Z_1, Z_2, Z_3),
(c) die Verteilungen der Z_i und $\mathrm{Kov}(Z_i, Z_j)$, $i \neq j$,
(d) die gemeinsame Verteilung von Z_2 und Z_3.

A 6.7.4: Für die folgenden 3×3-Matrizen $\mathbf{K}_n$ bestimme man soweit möglich eine Zerlegung der Form $\mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^{\mathrm{T}}$ mit unteren Dreiecksmatrizen $\mathbf{A}_n$.

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 \\ 6 & 5 & 8 \\ 9 & 8 & 17 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 13 & 8 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 12 \end{pmatrix},$$

Welche der Matrizen $\mathbf{K}_n$ sind positiv definit?

A 6.7.5: Die ZV $X_1, \dots, X_n$ seien stoch. unabhängig und $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Es sei $X := (X_1, \dots, X_n)^T$. Die ZV $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ sei bestimmt durch $Y = \mathbf{A}\, X$ mit einer $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$, deren Elemente gegeben sind durch

$a_{1j} := 1/\sqrt{n},\ j=1, \dots, n$ (1. Zeile) und für $i=2, \dots, n$

$a_{ij} := 1/\sqrt{i(i-1)},\ j=1, \dots, i-1;\ a_{ii} := -(i-1)/\sqrt{i(i-1)}$, sonst $a_{ij}=0$.

Man zeige: (a) Y ist standard-normalverteilt. (b) $Y_1 = (1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n X_i$ und Y_1 ist $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. (c) $\sum_{i=1}^n Y_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ (mit $X^T X = ?$). (d) $Z := \sum_{i=\mathbf{2}}^n Y_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\,(\sum_{i=1}^n X_i)^2$ (mit (c)). (e) Z ist χ^2_{n-1}-verteilt und stoch. unabhängig von Y_1.

A 6.8.1: An einer Bushaltestelle komme der nächste Bus nach T Minuten an. T sei gleichverteilt auf $\{1, \dots, 10\}$. Jede Minute treffen Y_i Fahrgäste ein. Y_i sei $B(5,\ 0{,}2)$-verteilt. $T, Y_1, ..., Y_{10}$ seien stochastisch unabhängig. Bis zur Ankunft des Busses treffen Z Fahrgäste ein. (a) Man bestimme die gemeinsame Verteilung von T und Z sowie $P(Z=k|T=t)$. (b) Man bestimme $E(Z|T=t)$, $\mathrm{Var}(Z|T=t)$, EZ und $\mathrm{Var}Z$.

A 6.8.2: Bei der Produktion von Bauteilen (eines nach dem anderen) benötige man für jedes Stück eine $\mathcal{N}(8{,}6, 1{,}44)$-verteilte Bearbeitungszeit. Bei der anschließenden Kontrolle trete mit Wahrscheinlichkeit 0,1 ein Fehler auf. Es sei T der Zeitpunkt, zu dem der erste Fehler beobachtet wird. (a) Unter der Bedingung, dass nach $k = 5$ Stücken der erste Fehler auftritt, bestimme man die Wahrscheinlichkeit, dass $T \leq t$ ist, außerdem den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz von T. (b) Man berechne den Erwartungswert und die Varianz von T.

A 6.8.3: Ein an einer seltenen Krankheit leidender Patient muss im Krankenhaus behandelt werden. Im Normalfall (d.h. in 7 von 10 Fällen) kann die Krankheit in durchschnittlich einer Woche geheilt werden. Bei 2 von 10 Patienten dauert die Heilung im Mittel nur drei Tage, während sich in 10% aller Fälle der Erfolg im Durchschnitt erst nach 30 Tagen einstellt. Wie groß ist die mittlere Behandlungsdauer? Wie groß ist die Streuung, wenn die Behandlungsdauern jeweils Gamma(2,ν)-verteilt sind?

A 6.8.4: Für Beispiel **??** (Typ T und Dauer D eines Rechen-Auftrags) bestimme man $E(D|T = t)$ und $\mathrm{Var}(D|T = t)$ für $t = 1, 2, 3$ und daraus ED und $\mathrm{Var}D$. Was für ein mathematisches Objekt ist $E(D|T)$?

A 7.1.1: Die folgenden Vorgänge sollen als „stochastische Prozesse“ $(X_t,\ t \in T)$ modelliert werden:

(a) die täglichen Niederschlagsmengen in Hamburg im Verlauf eines Jahres,
(b) der Momentanzustand einer Datenleitung (belegt, frei) während eines Tages,
(c) der Verlauf der Gehirnströme an fünf Messpunkten für eine Stunde.
Man gebe jeweils den Zustandsraum und den Zeitbereich an. Für welches Ω sind die Zufallsvariablen X_t gerade die (t-ten) Projektionen?

A 7.2.1: Der Geschäftsverlauf einer Firma werde als „gut“ oder „mäßig“ eingestuft. Die Wahrscheinlichkeit, von einem Quartal zum nächsten von „mäßig“ nach „gut“ (bzw. umgekehrt) zu gelangen, sei 0,3 (bzw. 0,2). (a) Man beschreibe diesen Vorgang als Markov-Kette und gebe den Übergangs-Graph an. (b) Wenn im ersten Quartal beide Stufen gleich wahrscheinlich sind, wie sind dann die Wahrscheinlichkeiten im zweiten Quartal? (c) Man bestimme die Gleichgewichts-Verteilung. (d) Was sagt diese aus?

A 7.2.2: Man skizziere die Übergangs-Graphen zu den folgenden Übergangsmatrizen für die Zustandsmenge $I = \{1, 2\}$:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}0 & 1{,}0 \end{pmatrix}$

Für die zugehörigen Markov Ketten (X_n) bestimme man $a_n := P(X_n = 1)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ mit $a_0 = 1/0{,}5/0$ und beobachte das langfristige Verhalten.

A 7.2.3: Eine Rechnerkomponente (K) sei zu den Zeitpunkten $t \in \mathbb{N}_0$ aktiv (= 1) oder inaktiv (= 0). Zur Zeit $t = 0$ sei K mit Wahrscheinlichkeit p_0 aktiv. Falls K für $t = n$ aktiv (inaktiv) ist, sei K zur Zeit $t = n+1$ mit Wahrscheinlichkeit $p_{11} = 0,8$ bzw. $p_{01} = 0,6$ aktiv. Es sei (X_t) die hierdurch bestimmte Markov-Kette.
(a) Man gebe die Übergangsmatrix und den Übergangs-Graph an. (b) Man bestimme die Gleichgewichts-Verteilung. (b) Man berechne $p_n := P(X_n = 1)$ für $n = 3, 4, \ldots$ in Abhängigkeit von p_0. $n \to \infty$? Man versuche, eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen.

A 7.3.1: Der Konjunkturverlauf eines Jahres werde als „gut“ oder „schlecht“ eingestuft. Nach einem „guten“ (bzw. „schlechten“) Jahr gebe es ein „schlechtes“ (bzw. „gutes“) mit Wahrscheinlichkeit 0,4 (bzw. 0,2). Man modelliere dieses System als Markov-Kette und bestimme die Gleichgewichts-Verteilung. Was sagt diese aus?

A 7.3.2: Eine Maschine sei jeden Tag in einem der Zustände g = „läuft gut“, s = „läuft schlecht“ und r = „wird repariert“. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen guten Zustand ein schlechter bzw. eine Reparatur folgt, sei 0,2 bzw. 0,1. Nach einem schlechten Tag muss die Maschine mit Wahrscheinlichkeit 0,3 repariert werden, besser werde sie nicht ohne Reparatur. Eine Reparatur führe nach einem Tag mit Wahrscheinlichkeit 0,4 (0,2) zu einem guten (schlechten) Zustand. (a) Man beschreibe das System als Markov-Kette durch Übergangsmatrix und Übergangs-Graph. (b) Man bestimme die Gleichgewichts-Verteilung. (c) Wie oft im Jahr (250 Arbeitstage) ist die Maschine im Mittel in Reparatur?

A 7.3.3: Für die Übergangsmatrix $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ bestimme man die Gleichgewichtsverteilung und vergleiche das Ergebnis mit der Folge p_n aus Aufgabe A 7.2.3.

A 8.1.1: In einer Teeplantage kommen an der Sammelstelle zur Weiterverarbeitung nacheinander Wagen mit frischen Teeblättern an, die möglichst bald verarbeitet werden müssen. Für die Zahl X_n der wartenden Wagen zu den Zeitpunkten $n = 0, 1, 2 \ldots$ (Taktlänge = 5 Minuten) liege die folgende Aufzeichnung vor:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$X_n(\omega)$	0	0	1	1	2	3	3	2	3	4	4	3	2	3	4	3	3	2	2	1	0

Man skizziere den zugehörigen Pfad, nummeriere die Ankünfte und vermerke bei jedem Abgang die zugehörige Ankunfts-Nummer, falls die Bedienregel (a) FCFS (b) LCFS angewandt wird. Wie lange müssen die Wagen jeweils warten? Man vergleiche die beiden Fälle.

A 8.2.1: An einem Schalter kommen je Stunde 15 Personen an und 25 können je Stunde bedient werden (im Mittel). (a) Welche Parameter haben die zur Modellierung des Ankunfts- und Bedienprozesses benutzten Bernoulli-Prozesse bei einer Taktlänge von 1 Minute bzw. 1 Sekunde. Wie groß sind dabei die Ankunfts- und Bedienrate(n)? (b) Nachdem eine Person bereits 3 Minuten bedient wurde, komme die nächste Person an. Wie lange muss diese (zweite) Person auf den Beginn ihrer Bedienung warten?

A 8.3.1: In einer (kleinen) KFZ-Werkstatt mit nur einem Reparaturplatz kommen durchschnittlich je Stunde 3 Aufträge an. Die mittlere Reparaturdauer sei 15 Minuten. Es gebe genügend Warteplätze. (a) Für ein geeignetes Markov-Modell (mit Taktlänge 10 Sekunden) skizziere man den Übergangs-Graph. Für den Gleichgewichtsfall bestimme man (b) die mittlere Anzahl der vorhandenen Aufträge und (c) die Wahrscheinlichkeit, dass z.Zt. n höchstens 10 Aufträge da sind.

A 8.3.2: In einer Sparkassenfiliale kommen am Kassenschalter (durchschnittlich) je Stunde 21 Kunden an. Die Bedienung dauert im Mittel 2 Minuten. Man formuliere die Übergangsmatrix für die Modellierung der Kundenzahl (Taktlänge 1 Sekunde) und bestimme die Gleichgewichtsverteilung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als drei Kunden am Schalter stehen.

A 8.3.3: Für Modell 1 aus Folgerung **??** bestimme man die Gleichgewichtsverteilung. Was ergibt sich für $h \to 0$? (Um die Berechnung zu vereinfachen, setze man z.B. $p := \lambda\, h$, $\overline{p} := 1 - \lambda\, h$, $q := \mu\, h$, $\overline{q} := 1 - \mu\, h$.
Zur Kontrolle hier das Ergebnis: $\pi_0 = 1 - \lambda/\mu$, $\pi_j = \frac{1-\lambda/\mu}{1-\mu\, h}\left(\frac{\lambda(1-\mu\, h)}{\mu(1-\lambda\, h)}\right)^j$, $j \geq 1$.)

A 8.4.1: In einer kleinen Schuhreparatur-Werkstatt (1 Schuhmacher) kommen jeden Tag (8 Arbeitsstunden) im Mittel 24 Aufträge an. Eine Reparatur dauert durchschnittlich 16 Minuten. (a) Wie viele Stunden am Tag hat der Schuhmacher im Mittel nichts zu tun? (b) Wieviele Aufträge sind im Mittel gleichzeitig in seiner Werkstatt? (c) Wie lange dauert die Fertigstellung eines Auftrags im Mittel? (d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man länger als 8 Stunden darauf warten muss? (Bei (b) und (c) zähle nur die Arbeitszeit.)

A 8.4.2: Zwei Filialen einer Firma haben im Mittel je 20 Rechenaufträge pro Minute. Es gibt zwei Pläne zur Bearbeitung dieser Aufträge: 1. Jede Filiale bekommt einen Rechner mit einer durchschnittlichen Bearbeitungsdauer von 1,2 Sekunden. 2. Es gibt einen gemeinsam genutzten, doppelt so schnellen Rechner. Man vergleiche beide Pläne im Gleichgewicht anhand folgender Fragen: (a) Wieviel Aufträge sind im Mittel im System? (b) Wie lange muss jeder Nutzer im Mittel auf die Beantwortung warten? (c) Wie groß ist das 95%-Quantil der Wartezeit? Was bedeutet diese Zahl? (d) Wie hoch ist die Auslastung des/der Rechner? Man versuche die Unterschiede zu begründen.

A 8.4.3: In einem Datennetz können auf einer Leitung 9000 Zeichen je Sekunde übermittelt werden. Es kommen jede Minute im Mittel 300 Blöcke (Aufträge) mit einer mittleren Länge von 1620 Zeichen an. Es seien ausreichend viele Zwischenspeicher vorhanden. (a) Unter geeigneten Annahmen bestimme man Ankunfts- und Bedienrate für die Ankunft von Blöcken. Wie groß ist die Auslastung? (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Blöcke (mindestens 10 Blöcke) auf die Übermittlung warten? (c) Wieviele Blöcke sind im Mittel im System? Wie stark streut dieser Wert? (d) Wie lange ist jeder Auftrag durchschnittlich im System?

A 8.5.1: An einem Montageplatz werde immer je ein Werkstück bearbeitet und es gebe nur einen Warteplatz. Eine Bearbeitung benötige im Mittel 20 Minuten. Jede Stunde kommen im Mittel vier Stücke an. Man nehme an, dass die abgewiesenen Stücke die weiteren Ankünfte nicht beeinflussen. (a) Man bestimme die Gleichgewichtsverteilung, falls sie existiert. (b) Wie groß sind Erwartungswert und Streuung der Zahl der Stücke im System? (c) Wieviele Stücke werden im Mittel je Stunde bearbeitet? (d) Wie lange muss man im Mittel auf eine Bearbeitung warten?

A 8.5.2: Eine Einpersonen-Auskunft verfüge über $K = 3$ Telefonleitungen, die bei Bedarf auf „Warteschleife" geschaltet werden. Eine Auskunft dauert im Mittel zwei Minuten. Jede Stunde kommen durchschnittlich 24 Anfragen an. Ankünfte bei K belegten Leitungen verfallen. Man skizziere den Übergangs-Graph bei einer Taktlänge von 1 Sekunde. Wie groß sind im Gleichgewicht (a) Erwartungswert und Streuung der Kundenzahl im System, (b) die mittlere Zahl der je Stunde bedienten Kunden, (c) die Wahrscheinlichkeit, dass ein Anrufer keine freie Leitung vorfindet? Wie groß muss K sein, damit höchstens 10% der Anrufer abgewiesen werden?

A 8.5.3 Ein Zweigwerk eines Unternehmens plant für Telefongespräche mit der Zentrale die Einrichtung von 3 Standleitungen. Es sind stündlich 75 Gespräche mit einer Durchschnittslänge von 2,4 Minuten zu erwarten. (a) Man gebe die Übergangs-Matrix und den Übergangs-Graph an. (b) Man bestimme die Gleichgewichts-Verteilung. (c) Wie hoch ist im Gleichgewicht der Anteil der Anrufe, die alle Leitungen besetzt vorfinden? (d) Wie viele Leitungen sind im Mittel belegt?

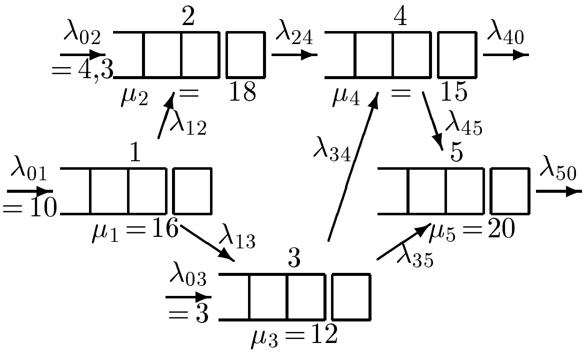
A 8.5.4: In einer Behörde werden gleichzeitig (unabhängig voneinander) zwei Antragsteller bedient, die anderen warten vor der Tür. (a) Man bestimme die Gleichgewichts-Verteilung, falls sie existiert. (Zur Kontrolle: Mit $\varrho := \lambda/2\mu$ gilt: $\pi_0 = (1-\varrho)/(1+\varrho)$ und für $j > 0$ $\pi_j = 2\,\pi_0 \cdot \varrho^j$. Für welche ϱ?) (b) Wieviele Kunden dürfen höchstens je Stunde ankommen, wenn jede(r) Angestellte im Mittel 15 Vorgänge je Stunde bearbeiten kann und die drei vorhandenen Sitzplätze vor der Tür mit Wahrscheinlichkeit 0,8 (in jedem Takt) ausreichen sollen. (Man zeige, dass $10\varrho^6 < 1 + \varrho$ gelten muss, und bestimme die maximale Ankunftrate durch Probieren.)

A 8.5.5: Man versuche, ein Bedienmodell und den Übergangs-Graph anzugeben für ein System mit Ankunftrate $\lambda = 5$, beliebig vielen Warteplätzen und 2 Bedienern mit unterschiedlichen Bedienraten $\mu_A = 6$ und $\mu_B = 3$. Welche Angabe fehlt? Man mache Vorschläge. (Bei genau einem der möglichen Vorschläge kann man die Gleichgewichtsverteilung mit der lokalen Gleichgewichtsbedingung (L) finden.)

A 8.6.1: Für das „Phasenmodell" aus Abschnitt **??** skizziere man den Übergangs-Graph für $m = 3$ Phasen. Was ändert sich, wenn jedem Kunden die Anzahl der zu durchlaufenden Phasen zu Beginn der Bedienung mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ zugewiesen wird?

A 8.7.1: An einer Maschine kommen 8 Werkstücke je Stunde an, die mittlere Bearbeitungszeit ist 6 Minuten, die Erfolgs-Quote 75 %. Wie lässt sich der „Strom" der abgehenden defekten Stücke modellieren?

A 8.7.2: Im nebenstehenden Bedien-Netz mit 3 stochastisch unabhängigen Bernoulli-Ankunftsprozessen, $M|M|1$ bzw. $\cdot|M|1$-Bedien-Systemen und Bernoulli-Zerlegung bei System 1, 3, 4 mit Zerlegungs-Wahrscheinlichkeiten $\alpha_{12} = 0{,}4$, $\alpha_{34} = 0{,}3$, $\alpha_{45} = 0{,}7$ bestimme man: (a) alle Abgangsraten, (b) die mittleren Kundenzahlen in den 5 Systemen, (c) die Wahrscheinlichkeit (im Gleichgewicht), dass zu einem festen Zeitpunkt t_0 in keinem der 5 Systeme mehr als fünf Kunden sind.



A 8.8.1: Man bestimme die Lösungen der Teilaufgaben A 8.4.1 (d) und A 8.4.2 (c) mit Hilfe der Exponential-Approximation aus Folgerung **??** und vergleiche sie mit dem früheren Ergebnis.

A 9.2.1: Man kann einen visuellen Eindruck von der Qualität eines Pseudo-Zufallszahlen-Generators bekommen, wenn man je zwei aufeinanderfolgende Zufallszahlen als Punkt im $\mathbb{R}^2$ interpretiert und eine größere Anzahl dieser Punkte ausdruckt. Im ungünstigen Fall erhält man ein mehr oder weniger starkes Streifenmuster. Man führe dieses Verfahren z.B. für den (extrem vereinfachten) Kongruenzgenerator nach (**??**) mit den Werten $m = 29$, $x_0 = 7$, $a = 11$ und $b = 0$ durch. (Für diese Zahlenwerte zeichne man erst 7 und dann 14 Punkte.)

A 9.3.1: Aus $\mathcal{R}(0,1)$-(Pseudo-)Zufallszahlen erzeuge man je 10 Zufallszahlen $X_1, \ldots, X_{10}$ mit den folgenden Verteilungen: (a) Laplace-Verteilung auf $\{5, 6, 7, 8, 9\}$, (b) Geo$^+$(0,2)-Verteilung, (c) Exp(0,2)-Verteilung, und (d) Gamma(0,2 , 3)-Verteilung. Man bestimme jeweils das Stichprobenmittel $\overline{X}_n$ und die Stichprobenvarianz $\overline{V}_n$ und vergleiche diese mit $\mathrm{E}X_1$ und $\mathrm{Var}X_1$.

A 9.3.2: Man erzeuge mit der Box-Muller-Methode (s. Abschnitt **??**, Nr. 11) zunächst $n = 50$ $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallszahlen und daraus durch Transformation 50 Zufallszahlen $X_1, \ldots, X_n$ mit $\mathcal{N}(12\,,\,16)$-Verteilung. Man vergleiche (wie bei Aufgabe A 9.3.1) $\overline{X}_n$ und $\overline{V}_n$ mit $\mathrm{E}X_1$ und $\mathrm{Var}X_1$.

A 9.3.3: Man erzeuge mit der Verwerfungsmethode 100 Zufallszahlen $X_1, \ldots, X_{100}$ mit Beta(9 , 3)-Verteilung. Man stelle die erhaltenen Werte in einem Balken-Diagramm mit Schrittweite 0,05 dar und vergleiche das Ergebnis mit dem Bild der R-Dichte $\mathrm{be}_{9,3}$ (s. Def. **??**).

A 9.4.1: Aus den in Aufgabe A 9.3.2 erzeugten $\mathcal{N}(12\,,\,16)$-verteilten Zufallszahlen $X_1, \ldots, X_{50}$ bestimme man die Zufallszahlen $M_j := \max(X_{2j-1}, X_{2j})$ $(j = 1, 2, \ldots, 25)$ und das zugehörige Stichprobenmittel $\overline{M}_{25}$ als Schätzung für $\mathrm{E}M_j$. (Die Verteilung des Maximums zweier normalverteilter stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen ist nicht ganz einfach zu erhalten.)

A 9.4.2: Man simuliere ein $M|M|1|4$-Bediensystem mit Taktlänge $h = 1/10$, Ankunftrate $\lambda = 6$ und Bedienrate $\mu = 10$ über die geometrisch verteilten Zwischenzeiten. Daraus bestimme man eine Schätzung der Überlaufrate mit Hilfe der regenerativen Methode, indem man für jeden Zyklus (s. Abschnitt **??**) die Zahl Z_i der abgewiesenen Kunden und die Länge T_i des Zyklus feststellt. Der Quotient aus den Stichprobenmitteln $\overline{Z}_n$ und $\overline{T}_n$ ist dann die gesuchte Schätzung. Man vergleiche mit dem theoretischen Wert $\lambda\,\pi_5$ (vgl. Folg. **??**).

A 10.1.1: Sie kaufen regelmäßig bei Ihrem Bäcker 10 Brötchen und wiegen Sie gelegentlich nach. Die folgenden Messreihen (in Gramm) entstanden (a) vor drei Monaten, (b) vor einer Woche, (c) vor zwei Tagen aus einer persönlich überreichten Tüte, nachdem Sie am Vortag wegen zu kleiner Brötchen protestiert hatten.

(a): 51,5 , 48,9 , 43,9 , 47,6 , 52,8 , 45,0 , 54,1 , 47,9 , 51,2 , 49,3 ,

(b): 45,9 , 45,2 , 44,4 , 44,5 , 46,0 , 46,8 , 46,7 , 43,6 , 48,5 , 41,6 ,

(c): 50,0 , 49,3 , 48,9 , 49,9 , 47,8 , 48,1 , 48,7 , 48,5 , 48,2 , 49,2 .

Vergleichen Sie die Messreihen mit Hilfe von Balkendiagrammen, Medianen und Quartilen. Welche Schlüsse würden Sie daraus ziehen?

A 10.2.1: Man zeige, dass für eine (u.i.v.) Stichprobe $X := (X_1, X_2, X_3)$ mit $m := \mathrm{E}X_1$ und $v := \mathrm{Var}X_1$ auch die Schätzfunktionen $h_1(X) := X_2$, $h_2(X) := (X_1+X_3)/2$ und $h_3(X) := 0{,}1X_1 + 0{,}3X_2 + 0{,}6X_3$ erwartungtreu für m sind. Dazu gebe man jeweils die Varianz von $h_i(X)$ an.

A 10.2.2: Sie beobachten in Hamburg n Taxi-Nummern $X_1, \ldots, X_n$ und wollen daraus die Zahl der vergebenen Taxi-Lizenzen schätzen unter der Annahme, dass diese Nummern näherungsweise stetig gleichverteilt auf $[0, b]$ sind und Ihre Stichprobe repräsentativ ist. (Dann ist $b = 2\,\mathrm{E}_b X_i$.)

Zeigen Sie, dass der Schätzer $\overline{h}_n(X_1, \ldots, X_n) := \frac{n+1}{2n} \max(X_1, \ldots, X_n)$ für $\frac{b}{2}$ erwartungstreu ist und (für $n \geq 2$) eine kleinere Varianz als $h_n(X_1, \ldots, X_n) := \overline{X}_n$ besitzt, evtl. nur für $n = 2$ und 3. Hinweis: $Y := \max(X_1, \ldots, X_n)$ hat auf $(0, b)$ die Verteilungsfunktion $F(x) = (x/b)^n$ und die R-Dichte $f(x) = F'(x)$.

A 10.2.3: Sie beobachten am Bankschalter an 5 verschiedenen Freitagen die Wartezeiten $X_i =$ 2:50 , 0:20 , 15:55 , 1:35 , 5:40 Minuten. Unter der Annahme, dass die X_i exponentialverteilt sind mit Mittelwert m, schätze man den Wert m mit dem sogenannten „Maximum-Likelihood-Prinzip“ (ML-Prinzip):

Man wähle den Schätzwert, für den die gemeinsame (R-)Dichte (mit den eingesetzten Beobachtungwerten) den größten Wert annimmt.

Welche Schätzung ergibt sich für beliebige Beobachtungswerte $x_1, \ldots, x_n$?

A 10.2.4: Bei $n = 10$ Kontrollen in jeweils 20 Vorgängen wurden die folgenden Fehler-Zahlen entdeckt: 6-mal 0, 3-mal 1 und einmal 2. Man bestimme (unter geeigneten Unabhängigkeitsannahmen) mit dem ML-Prinzip aus der vorangehenden Aufgabe die Fehlerwahrscheinlichkeit p eines einzelnen Vorgangs.

A 10.2.5: Für die Kapazität eines Kondensators liegen die folgenden Messwerte (in μF) vor: 3,15 , 2,93 , 2,87 , 3,21 , 3,04 , 2,96 , 2,79 , 3,06 , 2,98 , 2,81 .

Welchen Mittelwert und welche Streuung hat diese Messreihe?

A 10.3.1: Zu den drei Messreihen aus Aufgabe A 10.1.1 gebe man eine Intervallschätzung für den Erwartungswert an (unter Voraussetzung einer Normalverteilung und bei 95-prozentiger Sicherheit). Was ergibt sich, wenn man so tut, als ob die geschätzte Streuung die tatsächlich vorliegende wäre?

A 10.3.2: Zu den Fehlerzahlen aus Aufgabe A 10.2.4 bestimme man eine Intervallschätzung für die Fehlerquote p.

A 10.3.3: Vor einer Wahl gaben 36 von 500 befragten Personen an, für Partei XY zu stimmen. Mit welcher (näherungsweisen) Wahrscheinlichkeit konnte die Partei bei der Wahl mit dem benötigten Stimmenanteil von mindestens 5% rechnen? Wieviele Personen hätten bei der gleichen relativen Häufigkeit befragt werden müssen, um ein 95-prozentig sicheres Intervall zu erhalten?

A 10.4.1: Wenn bei den Messwerten von Aufgabe A 10.2.5 eine $\mathcal{N}(a, \sigma_0^2)$-Verteilung mit $\sigma_0 = 0{,}1$ vorausgesetzt wird, kann man dann 95-prozentig sicher sein, dass die Kapazität im Mittel nicht unter 2,93 μF liegt?

A 10.4.2: Für die Messreihe (b) aus Aufgabe A 10.1.1 teste man, ob der Mittelwert mit einer Sicherheit von 98% unter 48 Gramm (bzw. 47 bzw. 46 Gramm) liegt. Man setze eine Normalverteilung voraus.

A 10.4.3: Falls sich bei einer (repräsentativen) Umfrage unter 400 Personen (ab 10 Jahren) 56% für längere Ladenöffnungszeiten aussprechen, kann man dann 99-prozentig (95-prozentig) sicher sein, dass die Hälfte der (mindestens 10-jährigen) Bevölkerung dafür ist?

A 10.5.1: In der Situation von Aufgabe 5.3.1 (b) mit der Hypothese „unter 200 Stück sind *nicht mehr als* a =10 defekt“ gebe man das kritische Ereignis und die Fehlerwahrscheinlichkeiten 1. und 2. Art für einige a-Werte, z.B. $a = 9, 10, 12$, an.

A 10.5.2: Bei der Untersuchung des Fischbestands in einem Teich (s. Aufgabe A 5.3.2) teste man (mit einer Sicherheit von 95%), ob aufgrund der vorliegenden Stichprobe von 20 Fischen, darunter 6 markierte, mindestens 300 Fische in dem Teich sind.

A 10.6.1: Man werfe einen Spielwürfel 60-mal und teste ihn damit zum Niveau von 95% auf eine Gleichverteilung (vgl. Aufgabe A 1.5.3).

A 10.6.2: Beim Brennen von je 5 empfindlichen Keramikteilen haben sich die folgenden Zahlen der jeweils erfolgreich gebrannten Teile ergeben:

4 3 2 4 2 4 4 3 5 2 4 2 3 2 3 5 4 5 4 2 5 3 2 4 4 3 2 4 3 4

Man teste zum Niveau 95%, ob diese Werte zu einer B(5 , p)-Verteilung mit $p = 0{,}6$ (bzw. 0,7 bzw. 0,8) passen.

A 10.6.3: Man teste die in Aufgabe 1.5.4 (a) erhaltenen Werte $d_1, \ldots, d_{10}$ zum Niveau 90% auf eine geeignete geometrische Verteilung.

A 10.7.1: Man teste die Tabellen aus den Aufgaben A 5.9.1 und A 6.6.3 auf Unabhängigkeit (zu verschiedenen Niveaus).

A 10.7.2: Bei einer Befragung von 100 Personen nach zwei Ja-Nein-Merkmalen ergeben sich z.B. die Häufigkeiten $H_{00} = 10$, $H_{01} = 20$, $H_{10} = a$ und $H_{11} =$ (?). Bei welchen Werten für a wird die stochastische Unabhängigkeit der beiden Merkmale zum Niveau 98% abgelehnt?