Übungsblatt 2

Berechenbarkeitstheorie
Wintersemester 2012/13
Universität Hamburg

Schriftliche Abgabe am Anfang der Übung am 8. November 2012.

1. Beweisen Sie, daß die Funktion
$$s(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$
primitiv rekursiv ist.

2. Sei $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. Beweisen Sie, daß die Funktion
$$(x, z) \mapsto \prod_{y<z} f(x, y)$$
primitiv rekursiv ist.

3. Die *Ackermann-Funktion* ist definiert durch
$$\begin{aligned} A(0, y) &:= y + 1 \\ A(x + 1, 0) &:= A(x, 1) \\ A(x + 1, y + 1) &:= A(x, A(x + 1, y)). \end{aligned}$$
Zeigen Sie, daß für alle n, m und k gilt:
$$A(n, A(m, k)) \leq A(n + m + 2, k).$$

4. Definiere die Funktion $A_n(m) := A(n, m)$, wobei A die Ackermann-Funktion ist. Beweisen Sie, daß A_n primitiv rekursiv ist.

5. Sei $\mathcal{A}$ die Menge der von A majorisierten Funktionen. Beweisen Sie, daß $\mathcal{A}$ unter primitiver Rekursion abgeschlossen ist. Das bedeutet: falls g und h von A majorisiert werden, so auch die Funktion f definiert durch
$$\begin{aligned} f(0, y) &:= g(y) \\ f(x + 1, y) &:= h(x, f(x, y), y). \end{aligned}$$