Department Mathematik
Universität Hamburg

Naive Mengenlehre

Priv.-Doz. Dr. B. Löwe
Zusätzliche Übungen
geeignet zur Vorbereitung auf die Modulprüfung

Aufgabe #17.

Seien A, B und C Mengen. Beweisen Sie, dass es eine Bijektion zwischen $A^{B\times C}$ und $\left(A^B\right)^C$ gibt.

Aufgabe #18.

Seien $0 < \alpha < \beta$ Ordinalzahlen. Zeigen Sie, dass es $\nu \leq \beta$ und $\varrho < \alpha$ gibt, so dass

$$\beta = \alpha \cdot \nu + \varrho.$$

Zeigen Sie, daß ν und ϱ eindeutig bestimmt sind. Man nennt ϱ den **Rest beim Teilen von β durch α**. Kann es sein, daß $\nu = \beta$? Auch wenn $\alpha > 1$?
(*Hinweis.* Betrachten Sie $\{\mu\,;\,\alpha \cdot \mu > \beta\}$. Warum ist diese Klasse nicht leer?)

Aufgabe #19.

Eine Ordinalzahl λ heißt **Limes von Limiten** falls eine Menge von Limesordinalzahlen L ohne größtes Element existiert, so dass $\lambda = \bigcup L$. Für eine beliebige Ordinalzahl α sei $r(\alpha)$ der Rest beim Teilen von α durch ω. Zeigen Sie, dass eine Ordinalzahl α genau ein Limes von Limiten ist, wenn $r(\alpha) \geq \omega$.

Aufgabe #20.

Sei κ eine Kardinalzahl (also eine Ordinalzahl, so dass keine kleinere Ordinalzahl in Bijektion mit κ steht). Zeigen Sie, dass κ ein Limes von Limiten ist.

Aufgabe #21.

Seien X und Y Mengen. Falls $(X, \leq)$ eine partielle Ordnung ist, so ist $(Y, \leq \cap (Y \times Y))$ auch eine partielle Ordnung. Sei nun $(X, \leq)$ eine Wohlordnung. Zeigen Sie, dass $(Y, \leq \cap (Y \times Y))$ auch eine Wohlordnung ist.

Aufgabe #22.

Sei $f : \mathbb{N} \to X$ eine Injektion und sei $\leq$ eine lineare Ordnung auf X. Zeigen Sie, dass nicht sowohl $(X, \leq)$ als auch $(X, \geq)$ eine Wohlordnung sein können.
(*Hinweis.* Betten Sie $\mathrm{Bild}(f)$ ordnungserhaltend in das Einheitintervall $[0, 1]$ ein. Sie erhalten eine Folge in einem kompakten Raum; diese enthält eine konvergente Teilfolge. Nutzen Sie dies, um eine strikt auf- oder absteigende Kette in $(X, \leq)$ zu konstruieren.)

Aufgabe #23.
Sei Φ eine Formel, die eine echte Klasse beschreibt (also gibt es keine Menge M, so dass $x \in M$ genau dann wenn $\Phi(x)$). Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass $\{x\,;\,\Phi(x) \wedge x \notin X\}$ keine Menge ist.

Aufgabe #24.
Sei X eine Menge und $B \subseteq \mathrm{Pot}(X)$. Wir definieren eine Hierarchie von Mengen Σ^B_α und Π^B_α wie folgt:

$$\Sigma^B_0 := B,$$

$$\Pi^B_\alpha := \{X \backslash A\,;\, A \in \Sigma^B_\alpha\}.$$

Wir nennen eine Menge A eine **abzählbare Vereinigung der Stufe** α, falls es $\alpha_i < \alpha$ und $A_i \in \Pi^B_{\alpha_i}$ gibt (für $i \in \mathbb{N}$), so dass $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

$$\Sigma^B_\alpha := \{A\,;\, A \text{ is eine abzählbare Vereinigung der Stufe } \alpha\}.$$

Zeigen Sie, dass ein ζ existiert, so daß $\Sigma^B_\zeta = \Sigma^B_{\zeta+1}$. Mit Hilfe des Auswahlaxioms zeigen Sie dann, dass $\zeta \leq \omega_1$.
(*Hinweis.* Zeigen Sie, dass $\Sigma^B_{\omega_1} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi^B_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^B_\alpha$. Welche Eigenschaft von ω_1 verwenden Sie hier? Warum folgt daraus, dass $\Sigma^B_{\omega_1} = \Sigma^B_{\omega_1+1}$?)

Aufgabe #25.
Sei $f : \omega_1 \to \omega_2$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass es eine Bijektion zwischen ω_2 und $\omega_2 \backslash \mathrm{Bild}(f)$ gibt. Verwenden Sie das Auswahlaxiom, um sogar zu zeigen, daß eine Bijektion zwischen ω_2 und $\omega_2 \backslash \bigcup \mathrm{Bild}(f)$ gibt. Was geschieht, wenn wir in den obigen Behauptungen ω_2 durch ω_3, ω_4, oder ω_ω ersetzen?

Aufgabe #26.
Sei T eine transitive Menge. Wir sagen, dass T **das Paarmengenaxiom erfüllt**, falls für x und y aus T auch $\{x, y\} \in T$ gilt. Geben Sie ein genaues Kriterium an, wann die Menge $\mathbf{V}_\alpha$ (in Abhängigkeit von α) das Paarmengenaxiom erfüllt.

Aufgabe #27.
Nehmen wir für einen Moment an, es gäbe reguläre Limeskardinalzahlen. Zeigen Sie, dass für eine solche Zahl κ gelten muss, dass $\kappa = \aleph_\kappa$ (also ist κ ein Fixpunkt der $\aleph$-Funktion). Zeigen Sie ausserdem, dass der kleinste solche Fixpunkt keine reguläre Limeskardinalzahl ist.