MATHEMATIK I FÜR STUDIERENDE DER PHYSIK

In diesem Text werden logische und mengentheoretische Grundbegriffe zusammengestellt, die benötigt werden, mathematische Sachverhalte kurz und unmissverständlich zu formulieren, sowie das Beweisprinzip der Vollständigen Induktion eingeführt.
Wir folgen einer Ausarbeitung von E. BÖNECKE.

Definition 1: Unter einer **Aussage** A verstehen wir ein sprachliches oder schriftliches Gebilde, das entweder **wahr** (w) ist oder **falsch** (f). Man sagt auch, die Aussage A hat den **Wahrheitswert** w oder f.

Beispiel 2

Aussage	Wahrheitswert
Es gibt keinen Studierenden in diesem Hörsaal	f
$1 \cdot 2 = 2$	w
$1 \cdot 2 = 2$ und $3 \cdot 4 = 4$	f
$1 \cdot 2 = 2$ oder $3 \cdot 4 = 4$	w
Wenn Ptolemäus Recht hat, dann ist die Erde eine Scheibe	w

Wichtig ist für uns die **Verknüpfung von Aussagen** : Mathematische Sätze sind logisch verknüpfte Aussagen. Man definiert so eine Verknüpfung, indem man den Wahrheitswert der verknüpften Aussage in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der gegebenen Aussage festlegt:

Definition 3: Seien A und B zwei gegebene Aussagen. Dann definieren wir die Wahrheitswerte von
a) A **und** B, in Zeichen: $A \wedge B$, durch folgende Tabelle:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

$A \wedge B$ ist also genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

b) A **oder** B, in Zeichen: $A \vee B$, durch folgende Tabelle:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

$A \vee B$ ist also auch dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. Man sieht hier, wie sinnvoll es ist, solche Verabredungen am Anfang zu treffen, um Missverständnisse oder sprachlich unschöne Formulierungen wie “und/oder”, die man in juristischen Texten häufig findet, zu vermeiden.

c)**Aus A folgt B**, in Zeichen: $A \implies B$, man sagt auch: **A impliziert B** oder : **Wenn A gilt, dann gilt B** , durch folgenden Tabelle:

A	B	$A \implies B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Man beachte: $A \implies B$ ist stets wahr, wenn A falsch ist. Das mag manchen erstaunen, ist aber eine sinnvolle Definition, die sich sogar mit dem umgangssprachlichen Gebrauch deckt, wie das Beispiel “Wenn Ptolemäus Recht hat, dann ist die Erde eine Scheibe” zeigt, das wahr ist, obwohl beide Teilaussagen falsch sind.

d) **A gleichbedeutend mit B**, in Zeichen : $A \iff B$, man sagt auch: **A gilt genau dann, wenn B gilt**, durch folgende Tabelle:

A	B	$A \iff B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

e) **nicht A**, in Zeichen : $\neg A$, auch non A, durch die Tabelle

A	$\neg A$
w	f
f	w

Solche Tabellen mit Wahrheitswerten wie diese fünf hier nennt man auch **Wahrheitstafeln**.

Wahrheitstafeln verwendet man auch, um die Wahrheitswerte von weiteren verknüpften Aussagen wie

$$A \wedge (B \wedge C)$$
$$(\neg A) \vee B$$
$$\neg(A \vee B)$$

auszurechnen. Dabei muss man sämtliche möglichen Wahrheitswerte von A, B und C berücksichtigen, z.B. für $(\neg A) \vee B$:

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$
w	w	f	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Wir sehen an diesem Beispiel, dass $(\neg A) \vee B$ dieselbe Wahrheitstafel hat wie $A \implies B$. Man wird die Aussagen "$A \implies B$" und "$(\neg A) \vee B$" deshalb "logisch gleichwertig" nennen:

Definition 4: Gegeben seien mehrere Aussagen $A, B, C, \dots$ und zwei Aussagen X und Y, die beide durch Verknüpfung dieser Aussagen $A, B, C, \dots$ entstanden sind. Wenn die Aussage

$$X \iff Y$$

für alle möglichen Wahrheitswerte der Aussagen $A, B, C, \dots$ den Wahrheitswert w annimmt, so sagt man: X und Y sind **(logisch) gleichwertig**. Die Aussage "$X \iff Y$" bezeichnet man dann als eine **Tautologie**.

Satz 5: Wenn A, B, C Aussagen sind, dann gelten folgende Tautologien:

a) $\neg(\neg A) \iff A$
b) $A \wedge B \iff B \wedge A$
c) $(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C)$
d) $A \vee B \iff B \vee A$
e) $(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$
f) $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
g) $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
h) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$
i) $\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$
j) $(A \implies B) \iff ((\neg B) \implies (\neg A))$

Man **beweist** diesen Satz durch Wahrheitstafeln, z.B. für h) :

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	h)
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Zur Schreibweise : Bei den Formeln in Satz 5 haben wir Klammern weggelassen: Statt d) hätten wir genauer

$$(A \vee B) \quad \Longleftrightarrow \quad (B \vee A)$$

schreiben müssen. Man kann die Klammern weglassen, wenn man vereinbart: Die Verknüpfungen sind in der Reihenfolge

erst $\neg$, dann $\wedge$, dann $\vee$, dann $\Longrightarrow$ und dann $\Longleftrightarrow$

auszuführen, soweit Klammern nichts Anderes festlegen.

Neben Aussagen hat man es in der Mathematik zu tun mit Zahlen oder Buchstaben, die man zusammenfassen möchte zu einer Menge. Es bereitet nun erhebliche Schwierigkeiten, exakt zu definieren, was eine Menge ist. Da wir uns hier nicht mit Grundlagen der Mathematik beschäftigen wollen, reicht für uns die folgende

Definition 6: Unter einer **Menge** M verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die **Elemente** der Menge M genannt werden, zu einem Ganzen. Ist x ein Element von M , so schreiben wir

$$x \in M;$$

ist diese Aussage falsch, so schreiben wir

$$x \notin M.$$

Definition 7 (Schreibweise von Mengen): Man kann eine Menge auf zwei Arten angeben: Entweder, man schreibt in geschweiften Klammern alle Elemente der Menge hin, etwa

$$\{1, 2, 5, x\},$$

das soll bedeuten, dass die Menge aus den Elementen $1, 2, 5$ und x besteht, oder man schreibt in den geschweiften Klammern ein Symbol für die Elemente, einen senkrechten Strich und dann die Eigenschaft, die die Elemente haben sollen. Z.B. ist

$$\{ \ x \ | \ x \,\text{ist ganze Zahl und}\, 2 \,\text{teilt}\, x \ \}$$

die Menge der geraden ganzen Zahlen.

Definition und Beispiel 8: Mengen, die bei uns immer wieder vorkommen, sind

$$\mathbb{N}_0 \quad = \quad \{0, 1, 2, \ldots\}$$

(Pünktchen setzt man, wenn man nicht alle Elemente hinschreiben will oder kann, aber sich denken kann, wie es weitergeht), die Menge der **natürlichen Zahlen mit Null**,

$$\mathbb{N} \quad = \quad \{1, 2, 3, \ldots\}$$

die Menge der **natürlichen Zahlen**,

$$\mathbb{Z} \quad = \quad \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$$

die Menge der **ganzen Zahlen**,

$$\mathbb{Q} \quad = \quad \left\{ \frac{r}{s} \;\middle|\; r \in \mathbb{Z} \wedge s \in \mathbb{Z} \wedge s \neq 0 \right\}$$

die Menge der **rationalen Zahlen**, schließlich die Mengen $\mathbb{R}$ der **reellen** und $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen**, die in der Analysis eingeführt werden. Wir wollen noch vereinbaren, dass es eine Menge gibt, die gar kein Element enthält, die **leere Menge** $\emptyset$.

Definition 9 (Gleichheit zweier Mengen): Zwei Mengen M und N hei-en **gleich**, man schreibt $M \quad = \quad N$, wenn jedes Element von M auch Element von N, und jedes Element von N auch Element von M ist. Wir wollen diese Definition etwas formaler aufschreiben und dabei auch gleich zwei neue Symbole kennenlernen :

$$M \quad = \quad N \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, x \,:\, (x \in M \quad \Longleftrightarrow \quad x \in N) \quad ,$$

das Zeichen $\quad :\Longleftrightarrow \quad$ bedeutet, dass die linke Aussage durch die rechte definiert wird, man liest es : "**nach Definition gleichbedeutend**". Das Zeichen $\forall$ heißt: "**für alle**".

Definition 10 (Teilmenge): Seien M und N Mengen. Man sagt, M ist **Teilmenge** von N, wenn jedes Element von M auch Element von N ist. Formal :

$$M \subset N \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, x \,:\, (x \in M \quad \Longrightarrow \quad x \in N).$$

Beispiel 11: a) Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
b) Es gilt für jede Menge $M \,:\, \emptyset \subset M$.
Beweis: Es gilt $\forall\, x \,:\, (x \in \emptyset \quad \Longrightarrow \quad x \in M\,)$, denn die Aussage "$x \in \emptyset$ " ist für alle x falsch, nach Definition der leeren Menge.

Wir definieren drei Operationen zwischen Mengen:
Definition 12: Seien M und N Mengen.
a) Den **Durchschnitt** der Mengen M und N definieren wir als

$$M \cap N \quad := \quad \{\; x \;|\; x \in M \wedge x \in N \;\}\,.$$

Dabei bedeutet das Zeichen " $:=$ ", dass die linke Menge durch die rechte Menge definiert wird. Man liest es: "**nach Definition gleich**".
b) Als **Vereinigung** der Mengen M und N definieren wir

$$M \cup N \quad := \quad \{\ x \mid x \in M \vee x \in N\ \}\,.$$

c) Als **Differenz** von M und N definieren wir

$$M \setminus N \quad := \quad \{\ x \mid x \in M \wedge x \notin N\ \}\,.$$

Bemerkung 13: Wir haben inzwischen einige Zeichen kennengelernt:

$$\wedge \quad , \quad \vee \quad , \quad \neg \quad , \qquad \Longrightarrow \quad , \quad \Longleftrightarrow \quad , \quad :\Longleftrightarrow$$

stehen zwischen zwei **Aussagen**. Die Zeichen

$$\cap \quad , \quad \cup \quad , \quad \setminus \quad , \quad \subset \quad , \qquad = \quad , \quad :=$$

stehen zwischen zwei **Mengen**. Das ist klar, wird aber von Anfängern häufig falsch gemacht. In der Mathematik geht man davon aus, dass die Elemente von Mengen selbst wieder Mengen sind. Deshalb können die Zeichen

$$= \qquad , \qquad :=$$

auch zwischen Elementen einer Menge stehen.

Falls $N \subset M$ ist, hat man für $M \setminus N$ eine besondere Bezeichnung:
Definition 14: Seien M und N Mengen, $N \subset M$. Dann heißt

$$\complement N \quad := \quad M \setminus N$$

das **Komplement** von N (bezüglich M, genauer kann man auch $\complement_M N$ schreiben).

Aus Satz 5 folgen einige Rechenregeln für $\cap, \cup, \complement$:

Satz 15: Seien R, S, T Mengen, dann gilt
a) $R \cap S \quad = \quad S \cap R$
b) $(R \cap S) \cap T \quad = \quad R \cap (S \cap T)$
c) $R \cup S \quad = \quad S \cup R$
d) $(R \cup S) \cup T \quad = \quad R \cup (S \cup T)$
e) $R \cap (S \cup T) \quad = \quad (R \cap S) \cup (R \cap T)$
f) $R \cup (S \cap T) \quad = \quad (R \cup S) \cap (R \cup T)$
Sind S und T Teilmengen einer Menge M, so gilt für das Komplement bezüglich M :

g) $\complement(\complement S) \quad = \quad S$

h) $\complement(S \cup T) \quad = \quad \complement S \cap \complement T$

i) $\complement(S \cap T) \quad = \quad \complement S \cup \complement T$

Beweis mit den Regeln aus Satz 5; wir wollen das an einem Beispiel vorführen, etwa:
e) Nach Definition 9 muss man zeigen, dass jedes Element von $R \cap (S \cup T)$ auch Element von $(R \cap S) \cup (R \cap T)$ ist, und umgekehrt: Nun gilt für jedes Element x :

$$
\begin{array}{l}
x \in R \cap (S \cup T) \stackrel{12}{\Longleftrightarrow} \\
x \in R \,\wedge\, x \in S \cup T \stackrel{12}{\Longleftrightarrow} \\
x \in R \,\wedge\, (x \in S \vee x \in T) \stackrel{5}{\Longleftrightarrow} \\
(x \in R \wedge x \in S) \vee (x \in R \wedge x \in T) \stackrel{12}{\Longleftrightarrow} \\
x \in R \cap S \,\vee x \in R \cap T \stackrel{12}{\Longleftrightarrow} \\
x \in (R \cap S) \cup (R \cap T) \quad .
\end{array}
$$

Häufig gibt es Zuordnungsvorschriften zwischen Elementen verschiedener Mengen. Diese werden i der Mathematik beschrieben durch den Begriff der Funktion:

Definition 16: Seien M und N Mengen, dann heißt

$$M \times N \quad := \quad \{ \ (x, y) \mid x \in M \wedge y \in N \ \}$$

das **cartesische Produkt** der Mengen M und N. Die Elemente von $M \times N$ heißen **geordnete Paare** von Elementen von M und N. Wir wollen nicht definieren, was ein geordnetes Paar ist, man muss nur wissen, wann zwei geordnete Paare gleich sind: Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M \times N$, dann gilt

$$(x_1, y_1) \quad = \quad (x_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \quad .$$

Es kommt also auf die Reihenfolge an : $(2, 3) \neq (3, 2)$!

Definition 17: Seien M und N Mengen, dann heißt eine Vorschrift f, die **jedem** Element $x \in M$ **genau ein** Element aus N zuordnet, das man mit $f(x)$ bezeichnet, eine **Funktion** (**Abbildung**) von M in N. Man schreibt zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
f \, : \, M \ &\longrightarrow \ N \\
x &\longmapsto f(x) \quad .
\end{aligned}
$$

Die Menge M heißt der **Definitionsbereich** von f, die Menge N der **Wertebereich** von f, das Element $f(x)$ der **Funktionswert** von x. Für die Menge aller Funktionen von M in N schreiben wir: $\underline{\mathcal{F}(M,N)}$.

<u>Definition 18:</u> Seien M_1, M_2, N_1, N_2 Mengen. Zwei Funktionen

$$f : M_1 \longrightarrow N_1 \quad \text{und} \quad g : M_2 \longrightarrow N_2$$

heißen **<u>gleich</u>**, wenn gilt

$$M_1 = M_2 \quad \wedge \quad N_1 = N_2 \quad \wedge \quad \forall\, x \in M_1 : f(x) = g(x) \quad ,$$

also wenn Definitions- und Wertebereiche und für alle $x \in M_1$ die Funktionswerte übereinstimmen.

<u>Definition 19:</u> Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Sei $A \subset M$ und $B \subset N$. Dann heißt

$$f(A) := \{ \; y \in N \mid \text{es gibt ein}\, x \in A \,\text{mit}\, y = f(x) \; \}$$

das **<u>Bild</u>** von A unter f und

$$f^{-1}(B) \quad := \quad \{ \; x \in M \mid f(x) \in B \; \}$$

das **<u>Urbild</u>** von B unter f.

Für "es gibt ein" führt man eine Abkürzung ein:
<u>Definition 20:</u> Statt "es existiert ein" schreiben wir : "$\exists$". Sei also M eine Menge und $A(x)$ eine Aussage, die für Elemente x der Menge M wahr oder falsch ist, dann ist die Aussage

$$\exists\, x \in M : \; A(x)$$

sinnvoll.

<u>(21) Beachten Sie:</u> a) "$\exists\, x \in M : A(x)$" heißt, dass es **mindestens** ein Element x mit der Eigenschaft $A(x)$ gibt, es kann auch mehrere solche Elemente geben! Will man ausdrücken, dass es **genau ein** Element x mit der Eigenschaft $A(x)$ gibt, so schreibt man:

$$\exists_1\, x \in M : \; A(x) \quad .$$

b) Es gibt einige logische Regeln für " $\exists$ " und "$\forall$ ": Seien M und N Mengen und $A(x), B(x), C(x,y)$ Aussagen, deren Wahrheitswert davon abhängt, welche $x \in M$ bzw. $y \in N$ man einsetzt. Dann gelten die Regeln:
(1) $\neg(\forall\, x \in M : \; A(x)) \iff \exists\, x \in M : \; (\neg A(x))$
(2) $\neg(\exists\, x \in M : \; A(x)) \iff \forall\, x \in M : \; (\neg A(x))$
(3) $\forall\, x \in M : \; A(x) \wedge \forall\, x \in M : \; B(x) \iff \forall\, x \in M : \; (A(x) \wedge B(x))$

(4) $\forall x \in M : \; A(x) \vee \forall x \in M : \; B(x) \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in M : \; (A(x) \vee B(x))$
(5) $\exists x \in M : \; (A(x) \vee B(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in M : \; A(x) \vee \exists x \in M : \; B(x)$
(6) $\exists x \in M : \; (A(x) \wedge B(x)) \quad \Longrightarrow \quad \exists x \in M : \; A(x) \wedge \exists x \in M : \; B(x)$
(7) $\quad \forall x \in M \, \forall y \in N : \; C(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \in N \, \forall x \in M : \; C(x,y)$
(8) $\quad \exists x \in M \, \exists y \in N : \; C(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists y \in N \, \exists x \in M : \; C(x,y)$
(9) $\quad \exists x \in M \, \forall y \in N : \; C(x,y) \quad \Longrightarrow \quad \forall y \in N \, \exists x \in M : \; C(x,y).$
Man mache sich an Beispielen klar, dass bei (4),(6) und (9) nicht “$\Longleftrightarrow$ ” gilt!

Definition 22: Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung und $A \subset M$. Dann heißt die durch

$$f|_A : A \longrightarrow N \quad , \quad f|_A(x) \quad := \quad f(x)$$

definierte Abbildung die **Restriktion (Einschränkung)** von f auf A. $f|_A$ hat also einen kleineren Definitionsbereich als f; die Funktionswerte $f|_A(x)$ sind für $x \in A$ aber die gleichen wie die Funktionswerte $f(x)$.

Zusätzliche Eigenschaften von Funktionen haben besondere Namen:
Definition 23: Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. f heißt
a) **surjektiv** (Abbildung von M **auf** N), wenn $f(M) = N$ ist, oder, was nach Definition 17 gleichbedeutend ist:

$$\forall y \in N \, \exists x \in M : \; f(x) \quad = \quad y \quad ,$$

b) **injektiv** (**eineindeutig**), wenn verschiedene Elemente von M verschiedene Funktionswerte haben, oder, was gleichbedeutend ist:

$$\forall x, x' \in M : \; (\, f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x' \,) \quad ,$$

c) **bijektiv**, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Definition 24: Sei $f : M \longrightarrow N$ bijektiv. Sei $y \in N$, dann gibt es dazu, da f surjektiv ist, ein, und da f injektiv ist, genau ein Element aus M, dessen Funktionswert gleich y ist, wir nennen es $f^{-1}(y)$. Die Funktion

$$f^{-1} : N \longrightarrow M \quad , \quad y \longmapsto f^{-1}(y)$$

heit die **Umkehrfunktion** von f.

(25) Beispiele: 1) Ist M eine Menge, so heißt

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_M : \; M &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

die **identische Abbildung** von M. Sie bildet jedes Element auf sich selbst ab und ist bijektiv.

2) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, so ist f nicht surjektiv, denn zu -1 gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$. f ist auch nicht injektiv, denn

$$f(2) = f(-2) = 4 \quad , \quad \text{aber} \quad 2 \neq -2 \quad .$$

Setzt man aber $\mathbb{R}_+ := \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$ und betrachtet

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad , \quad g(x) := x^2 \quad ,$$

so ist g bijektiv. Um das zu beweisen, muss man zeigen, dass es zu jedem $y \in \mathbb{R}_+$ ein $x \in \mathbb{R}_+$ mit $y = x^2$ gibt, also dass man aus positiven reellen Zahlen Quadratwurzeln ziehen kann. Wir werden das in später in der Vorlesung lernen.

Definition 26: Seien $f : L \longrightarrow M$ und $g : M \longrightarrow N$ Abbildungen, dann kann man die **Hintereinanderausführung** (oder auch **Verkettung**) von f und g bilden:

$$g \circ f : L \longrightarrow N \quad ,$$
$$x \longmapsto g(f(x)) \quad .$$

Beachten Sie, dass man $(g \circ f)(x)$ erhält, indem man **zuerst** f auf x und **dann** g auf $f(x)$ anwendet.

Bildet man die Hintereinanderausführung von drei oder mehr Funktionen, so kommt es nicht auf die Reihenfolge der Klammern an:
Satz 27 (Assoziativität der Hintereinanderausführung): Seien

$$f : K \longrightarrow L \quad , \quad g : L \longrightarrow M \quad , \quad h : M \longrightarrow N$$

Abbildungen, dann gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad .$$

Beweis : $(h \circ g) \circ f$ und $h \circ (g \circ f)$ sind beides Abbildungen von K in N, und für alle $x \in K$ gilt

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \quad ,$$
$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \quad .$$

Nach Definition 16 gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Wir wollen noch ein Kriterium dafür beweisen, wann eine Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv ist:
Satz 28: Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Funktion und seien $M, N \neq \emptyset$. Dann

gilt:
a) f ist injektiv genau dann, wenn es eine Abbildung

$$g : N \longrightarrow M \quad \text{mit} \quad g \circ f = \mathrm{id}_M \quad \text{gibt.}$$

b) f ist surjektiv genau dann, wenn es eine Abbildung

$$g : N \longrightarrow M \quad \text{mit} \quad f \circ g = \mathrm{id}_N \quad \text{gibt.}$$

c) f ist bijektiv genau dann, wenn es eine Abbildung

$$g : N \longrightarrow M \quad \text{mit} \quad f \circ g = \mathrm{id}_N \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{id}_M \quad \text{gibt.}$$

In diesem Fall ist $g = f^{-1}$ die Umkehrfunktion von f.
Beweis : a) 1.) Sei f injektiv. Sei $y \in N$, dann gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder ist $y \in f(M)$, dann gibt es, da f injektiv ist, genau ein x mit $y = f(x)$. Wir setzen $g(y) := x$. Oder es ist $y \notin f(M)$. Wegen $M \neq \emptyset$ gibt es ein Element $x_0 \in M$. Wir setzen dann $g(y) := x_0$. Dann ist

$$g \circ f = \mathrm{id}_M \quad ,$$

denn für alle $x \in M$ gilt $(g \circ f)(x) = x$.
2.) Es gebe ein $g : N \longrightarrow M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Seien $x, x' \in M$, dann gilt

$$f(x) = f(x') \implies g(f(x)) = g(f(x')) \implies \mathrm{id}_M(x) = \mathrm{id}_M(x')$$

$$\implies x = x' \quad , \quad \text{also ist } f \text{ injektiv.}$$

b) Übungsaufgabe.
c) 1.) Wenn es ein $g : N \longrightarrow M$ mit

$$f \circ g = \mathrm{id}_N \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{id}_M$$

gibt, folgt aus a) und b), dass f bijektiv ist.
2.) Wenn f bijektiv ist, haben wir die Umkehrfunktion $f^{-1} : N \longrightarrow M$, die die beiden Gleichungen

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N \quad , \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$$

erfüllt.
3.) Sei f bijektiv und es gebe $g : N \longrightarrow M$ mit

$$f \circ g = \mathrm{id}_N \quad , \quad g \circ f = \mathrm{id}_M \quad ,$$

dann folgt

$$f^{-1} \quad = \quad f^{-1} \circ (f \circ g) \quad = \quad (f^{-1} \circ f) \circ g \quad = \quad \mathrm{id}_N \circ g \quad = \quad g.$$

Definition 29: a) Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\underline{n} \quad := \quad \{1, 2, \ldots, n\} \quad , \quad \text{und zusätzlich}$$

$$\underline{0} \quad := \quad \emptyset \quad .$$

b) Sei M eine Menge. M heißt **endlich**, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und eine bijektive Abbildung

$$f \, : \, \underline{n} \longrightarrow M$$

gibt. Man kann dann (mit Induktion) beweisen, dass das n eindeutig bestimmt ist. Es ist daher sinnvoll,

$$\#(M) \quad := \quad n$$

die **Mächtigkeit** von M zu nennen.
c) Ist die Menge M nicht endlich, so heißt M eine **unendliche** Menge.

Zum Schluss führen wir noch das Beweisprinzip der Vollständigen Induktion ein:

Definition 30: Die ganzen Zahlen kann man anordnen, indem man für $a, b \in \mathbb{Z}$ definiert:

$$a \leq b \quad :\Longleftrightarrow \quad b - a \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Statt $a \leq b$ schreibt man auch: $b \geq a$.

31 Beweisprinzip der vollständigen Induktion
Für jede natürliche Zahl n sei eien Aussage $A(n)$ gegeben. Alle Aussagen $A(n)$ sind richtig, wenn man (I) und (II) beweisen kann:
(I) *Induktionsanfang:* $A(1)$ ist richtig.
(II) *Induktionsschluss:* Für jedes n ist $A(n+1)$ richtig unter der Voraussetzung, dass $A(n)$ gilt.

Bemerkung 32: Wenn Ihnen die Schreibweise

$$1 + 2 + \ldots + n$$

für die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n zu unpräzis erscheint, müssen Sie **rekursiv** das **Summenzeichen** definieren, d.h. Sie müssen das Induktionsprinzip zur Definition benutzen. Das geht so:
Definition 33: Sei M eine Menge, in der eine Addition $+$ definiert ist.

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$. Für jede Zahl k in $\mathbb{Z}$ mit $m \leq k \leq n$ sei $a_k \in M$ gegeben. Dann setzen wir

(I) für $n = m$: $\sum\limits_{k=m}^{m} a_k \quad := \quad a_m$

(II) für $n \geq m$: $\sum\limits_{k=m}^{n+1} a_k \quad := \quad \sum\limits_{k=m}^{n} a_k + a_{n+1} \quad ,$

wenn auch $a_{n+1} \in M$ ist.

Übrigens: wenn M ein Element 0 mit der Eigenschaft

$$\forall\, a \in M : \; a + 0 \quad = \quad a$$

besitzt, definiert man noch die **<u>leere Summe</u>**

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0 \quad \text{für} \quad n < m \quad .$$