Differentialgeometrie I — SS 2008

Thomas Leistner
Schwerpunkt Analysis und Differentialgeometrie
Geomatikum, Raum 222, Tel.: 42838 5147
leistner@math.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Department Mathematik

Übungsblatt 9

— Abgabe zum 13.06.2008 —

Aufgabe 9.1: Kartenprojektionen. **8 Punkte**

Sei S^2 die 2-dimensionale Sphäre, ausgestattet mit der durch das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik g.

a) **Lambertprojektion:** Die Lambertprojektion λ ist gegeben durch die Projektion von S^2 aus der z-Achse auf den umgebenden Zylinder $Z^2 := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1, z \in (-1,1)\}$ und anschliessendes Abrollen. D.h.

$$\begin{array}{rcccccc} \lambda & : & S^2 \setminus \{(\sin\varphi, 0, \cos\varphi) \mid \varphi \in [0,\pi]\} & \to & Z^2 \setminus \{(1,0,z\} & \to & (0,2\pi) \times (-1,1) \\ & & (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi) & \mapsto & (\cos\theta, \sin\theta, \cos\varphi) & \mapsto & (\theta, \cos\varphi) \end{array}$$

für $\theta \in (0,2\pi)$ und $\varphi \in (0,\pi)$. Zeigen Sie, daß λ keine konforme Abbildung ist, aber das Volumen, d.h. die Volumenform, erhält. Diese Projektion ist benannt nach dem Mathematiker Johann Heinrich Lambert (1728-1777).

b) **Mercatorprojektion:** Mit einer glatten Funktion $f : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ kann man die Lambertprojektion wie folgt ändern

$$\begin{array}{rcccc} \lambda_f & : & S^2 \setminus \{(\sin\varphi, 0, \cos\varphi) \mid \varphi \in [0,\pi]\} & \to & (0,2\pi) \times \mathrm{Bild}(f) \\ & & (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi) & \mapsto & (\theta, f(\varphi)). \end{array}$$

Finden Sie eine Funktion f, so daß λ_f ein konformer Diffeomorphismus wird. Dies ist die Mercatorprojektion, benannt nach dem Kartographen Gerhard Mercator (1512-1594).

Aufgabe 9.2: Killingvektorfelder auf dem hyperbolischen Raum. **12 Punkte**

Sei $\mathbb{R}^{1,2}$ der 3-dimensionale Minkowski-Raum ausgestattet mit kartesischen Koordinaten (t,x,y) und mit dem Skalarpodukt vom Index 1, d.h. $\langle (t,x,y),(s,u,v)\rangle = -ts + xu + yv$. Sei $H^2_+ := \{(t,x,y) \in \mathbb{R}^{1,2} \mid -t^+x^2+y^2 = -1,\ t>0\}$ eine Zusammenhangskomponente des hyperbolischen Raumes, ausgestattet mit der Riemannschen Metrik g, die durch das Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ induziert wird. Zeigen Sie, daß die folgenden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^{1,2}$ Vektorfelder auf H^2_+ definieren, berechnen Sie deren Kommutatoren und weisen Sie nach, daß es sich um Killingvektorfelder der Metrik g handelt:

$$\begin{aligned} T(t,x,y) &= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \\ X(t,x,y) &= y\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial y} \\ Y(t,x,y) &= x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

20 Punkte