Differentialgeometrie I — SS 2008
Thomas Leistner
Schwerpunkt Analysis und Differentialgeometrie
Geomatikum, Raum 222, Tel.: 42838 5147
leistner@math.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Department Mathematik

Übungsblatt 8

— Abgabe zum 06.06.2008 —

Aufgabe 8.1: Stereographische Projektion des hyperbolischen Raumes. 8 Punkte

Bezeichne $\langle .,. \rangle_n$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und $\langle x,y\rangle_{1,n} = -x_0y_0 + \sum_{i=1}^n x_iy_i$ das Skalarprodukt des $(n+1)$-dimensionalen Minkowski-Raumes. Sei $H^n_+ := \{x = (x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{1,n} \mid \langle x,x\rangle_{1,n} = -1,\ x_0 > 0\}$ eine Zusammenhangskomponente des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes versehen mit der durch $\langle .,. \rangle_{1,n}$ induzierten Riemannschen Metrik h. Zeigen Sie, daß der Diffeomorphismus

$$\begin{array}{rccl} \psi & : & H^n_+ & \longrightarrow & B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x,x\rangle < 1\} \subset \mathbb{R}^n \\ & & (x_0,\dots,x_n) & \longmapsto & \frac{1}{1+x_0}\,(x_1,\dots,x_n) \end{array}$$

mit der Inversen

$$\begin{array}{rccl} \psi^{-1} & : & B^n & \longrightarrow & H^n_+ \\ & & x & \longmapsto & \frac{1}{1-\|x\|^2_n}\left(\|x\|^2+1, 2x_1,\dots,2x_n\right) \end{array}$$

eine Isometrie zwischen (H^n_+, h) und (B^n, g) ist, wobei g die hyperbolische Metrik auf B^n bezeichne,

$$g = \frac{4}{(1-\|x\|^2_n)^2}\sum_{i=1}^n dx_i^2.$$

(ψ ist die stereographische Projektion aus dem Punkt $(-1,0,\dots,0)$, d.h. das Bild eines Punktes in $p \in H^n$ ist der Schittpunkt der Gerade durch p und $(-1,0,\dots,0)$ mit der Hyperebene $\{x_0 = 0\} = \mathbb{R}^n$.)

Aufgabe 8.2: Kreisscheibe, Halbebene und Möbius Transformationen. 12 Punkte

In zwei Dimensionen können die hyperbolische Kreisscheibe und die hyperbolische obere Halbebene als Teilmengen von $\mathbb{C}$ realisiert werden

$$B^2 = \{(x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mid x^2+y^2 < 1\}, \qquad g^B = \frac{1}{(1-x^2-y^2)^2}(dx^2+dy^2)$$
$$P^2 = \{(x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mid y > 0\}, \qquad g^P = \frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2)$$

a) Beweisen Sie daß die Abbildung $\Psi\ :\ P^2 \ni z\ \mapsto\ \frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z} \in B^2$ eine Isometrie zwischen (P^2, g^P) und (B^2, g^B) definiert.

b) Zeigen Sie, daß jedes Element $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, d.h. jede Matrix mit Determinante 1, eine Isometrie von (P^2, g^P) auf sich selbst definiert mittels

$$\Psi_A\ :\ H^2 \ni z\ \mapsto\ \frac{az+b}{cz+d}\,.$$

Diese Abbildungen heißen *Möbius Transformationen*.

20 Punkte