Differentialgeometrie I — SS 2008
Thomas Leistner
Schwerpunkt Analysis und Differentialgeometrie
Geomatikum, Raum 222, Tel.: 42838 5147
leistner@math.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Department Mathematik

Übungsblatt 7: Semi-Riemannsche Metriken

— Abgabe zum 30.05.2008 —

Aufgabe 7.1: Induzierte Metrik auf der Wendelfläche. **4 Punkte**

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$$

und $W := \{\varphi(r,\theta) \mid (r,\theta) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$ die Wendelfläche, bei der es sich um eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ handelt. Berechnen Sie die lokalen Koeffizienten der Riemannschen Metrik, die durch das Euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ induzierten wird, bezüglich der durch die globale Karte (W, φ^{-1}) gegebenen Koordinaten (r,θ).

Aufgabe 7.2: Untermannigfaltigkeiten im Minkowskiraum. **8 Punkte**

Sei $\mathbb{R}^{1,n}$ der Minkowskiraum, d.h. der $\mathbb{R}^{n+1}$ ausgestattet mit einem Skalarprodukt $\langle .,. \rangle_{1,n}$ vom Index 1. Wir betrachten die folgenden Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^{1,n}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^n &:= \{x \in \mathbb{R}^{1,n} \mid x \neq 0,\ \langle x,x\rangle_{1,n} = 0\}, \text{ der Lichtkegel,} \\ H^n &:= \{x \in \mathbb{R}^{1,n} \mid \langle x,x\rangle_{1,n} = -1\}, \text{ hyperbolischer Raum und} \\ S^{1,n-1} &:= \{x \in \mathbb{R}^{1,n} \mid \langle x,x\rangle_{1,n} = 1\}, \text{ de Sitter Raum.} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß $\langle .,. \rangle_{1,n}$ keine semi-Riemannsche Metrik auf $\mathcal{C}$, eine Riemannsche Metrik auf H^n und eine Lorentzmetrik auf $S^{1,n-1}$ induziert. *Tip: Erinnern Sie sich daran, wie der Tangentialraum für gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten berechnet werden kann!*

Aufgabe 7.3: Der Gradient einer glatten Funktion. **8 Punkte**

Sei (M,g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Beweisen Sie, daß es genau ein Vektorfeld $\operatorname{grad} f \in \mathfrak{X}(M)$ gibt, für das gilt

$$g_p(\operatorname{grad} f_p, X) = df_p(X) \quad \text{für alle } p \in M \text{ und alle Vektoren } X \in T_pM.$$

Die Glattheit erhalten Sie, indem Sie zeigen: Ist $(U, \varphi = (x_1,\ldots,x_n))$ eine lokale Karte auf M, dann gilt

$$\operatorname{grad} f|_U = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j},$$

wobei g^{ij} die Koeffizienten der inversen Matrix von $g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ sind.

$\operatorname{grad} f \in \mathfrak{X}(M)$ heißt *Gradient von f*.

20 Punkte