Differentialgeometrie I — SS 2008
Thomas Leistner
Schwerpunkt Analysis und Differentialgeometrie
Geomatikum, Raum 222, Tel.: 42838 5147
leistner@math.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Department Mathematik

Übungsblatt 6: Distributionen

— Abgabe zum 23.05.2008 —

Aufgabe 6.1: Immersion von $\mathbb{R}$ in den Torus. **8 Punkte**

Der 2-Torus $S^1 \times S^1$ kann in $\mathbb{C}^2$ eingebettet werden mittels $T^2 = S^1 \times S^1 = \{(\mathrm{e}^{i\varphi}, \mathrm{e}^{i\theta}) \in \mathbb{C}^2 \mid (\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2\}$. Das Bild T^2 heißt *Clifford-Torus*. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die glatte Abbildung

$$\gamma_\alpha : \mathbb{R} \ni t \mapsto (\mathrm{e}^{2\pi i t}, \mathrm{e}^{2\pi i \alpha t}) \in T^2.$$

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist diese Abbildung eine injektive Immersion in T^2, aber keine Einbettung.

b) Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ definiert diese Abbildung eine Einbettung von S^1 in T^2.

Tip: Benutzen Sie, daß die Menge $\{m\alpha + n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, falls $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Aufgabe 6.2: Integrable Distributionen. **8 Punkte**

a) Auf $M := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ definieren wir die folgenden Vektorfelder:

$$\begin{aligned} X(x,y,z) &:= (x+y, y-x, z) \in T_{(x,y,z)} \simeq \mathbb{R}^3 \\ Y(x,y,z) &:= (x-y, x+y, z) \in T_{(x,y,z)} \simeq \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß die Distribution $\mathcal{C}$ auf M, die durch X aund Y aufgespannt wird, integrabel ist.

b) Zeigen Sie, daß die folgende Distribution $\mathcal{D}$ auf $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ integrabel ist:

$$\mathcal{D} = \dot{\bigcup}_{p \in M} p^\perp.$$

Hierbei bezeichne $p^\perp \subset \mathbb{R}^3 \simeq T_p\mathbb{R}^3$ das orthogonale Komplement des Vektors $p \in M$ bezüglich des Euklidischen Skalarproduktes.

Was sind die Integralmannigfaltigkeiten von $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$?

Aufgabe 6.3: Nicht-integrable Distributionen. **4 Punkte**

Geben Sie ein Beispiel für eine nicht integrable Distribution an.

20 Punkte