**Differentialgeometrie I — SS 2007**
Thomas Leistner
Schwerpunkt Analysis und Differentialgeometrie
Geomatikum, Raum 222, Tel.: 42838 5147
leistner@math.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Department Mathematik

# Übungsblatt 5: Der Kommutator

**— Abgabe zum 9.5.2007 —**

**Aufgabe 5.1: Der Kommutator verknüpfter Vektorfelder.** **3 Punkte**

Führen Sie den in der Vorlesung angedeuteten Beweis der folgenden Aussage im Detail aus: Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder auf $M$, die $f$-verknüpft sind mit den Vektorfeldern $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ auf $N$, d.h. $df_p(X_i(p)) = Y_i(f(p))$, für $i = 1, 2$ und $p \in M$. Dann sind die Kommutatoren $f$-verknüpft, d.h.

$$df_p([X_1, X_2](p)) \quad = \quad [Y_1, Y_2](f(p)).$$

**Aufgabe 5.2: Kommutator von Vektorfeldern auf Untermannigfaltigkeiten.** **3 Punkte**

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder auf $M$, d.h. $X = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ und $Y = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$, mit $\xi_i \in C^\infty(M)$ und $\eta \in C^\infty(M)$, können aufgefaßt werden als glatte Abbildungen von $M \subset \mathbb{R}^N$ nach $\mathbb{R}^N$. Beweisen Sie:

$$[X, Y] = (X(\eta_1), \ldots, X(\eta_N)) - (Y(\xi_1), \ldots, Y(\xi_N)),$$

wobei $X(\eta_i)$ und $Y(\xi_i)$ die Richtungsableitungen bezeichnen.

**Aufgabe 5.3: Die Wendelfläche.** **6 Punkte**

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta, \theta)$$

und $W := \{\varphi(r, \theta) \mid (r, \theta) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$ die Wendelfläche, bei der es sich um eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ handelt. Berechnen Sie die kanonische Basis $\frac{\partial}{\partial r}$ and $\frac{\partial}{\partial \theta}$ der durch die globale Karte $(W, \varphi^{-1})$ gegebenen Koordinaten $(r, \theta)$. Sei weiterhin $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ die Projektion auf die ersten beiden Komponenten und $\pi|_W$ ihre Einschränkung auf $W$. Gibt es Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$, die $\pi|_W$-verknüpft sind mit $\frac{\partial}{\partial r}$ bzw. mit $\frac{\partial}{\partial \theta}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 5.4: Vektorfelder auf $S^2$.** **12 Punkte**

Gegeben seien die folgenden Vektorfelder auf der 2-Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$X(x, y, z) := (0, -z, y),\ Y(x, y, z) := (z, 0, -x),\ Z(x, y, z) := (-y, x, 0),\ V(x, y, z) := (xz, yz, z^2 - 1).$$

a) Berechnen Sie deren Kommutatoren.

b) Berechnen Sie den *push forward* von $V$ eingeschränkt auf $S^2 \backslash (0, 0, 1)$ unter der stereographischen Projektion

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & S^2 \setminus \{(0,0,1)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x, y, z) & \longmapsto & \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right). \end{array}$$

c) Berechnen Sie die Integralkurven von $X, Y, Z$ und $V$ durch einen Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$ und beschreiben Sie die Flüsse, die durch diese Vektorfelder gegeben werden.

**24 Punkte**