Differentialgeometrie I — SS 2008
Thomas Leistner
Schwerpunkt Analysis und Differentialgeometrie
Geomatikum, Raum 222, Tel.: 42838 5147
leistner@math.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Department Mathematik

Übungsblatt 4: Einbettungen und Submersionen

— Abgabe zum 02.05.2008 —

Auf diesem Blatt geht es wieder um projektive Räume. Dazu führen wir eine Bezeichnung ein. Für einen Punkt im reell oder komplex projektiven Raum $\mathbb{K}P^n$, der gegeben ist als Äquivalenzklasse des Vektors $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$, schreiben wir

$$[x_1 : \ldots : x_{n+1}] \ := \ [(x_1, \ldots, x_n)] \,.$$

Aufgabe 4.1: Warum sind sowohl $\mathbb{R}P^n$ als auch $\mathbb{C}P^n$ kompakt? **4 Punkte**

Im Folgenden sollten Sie sich an einigen Stellen an Aufgabe 3.2.c) erinnern. Deren Behauptung gilt nicht nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sondern auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und darf benutzt werden.

Aufgabe 4.2: Einbettung von $\mathbb{R}P^2$ in den $\mathbb{R}^4$. **6 Punkte**

Zeigen Sie, daß die folgende Abbildung eine Einbettung des reell projektiven Raumes $\mathbb{R}P^2$ in den $\mathbb{R}^4$ ist:

$$f : \mathbb{R}P^2 \ni [x : y : z] \longmapsto \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(yz, xz, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2) \in \mathbb{R}^4$$

Aufgabe 4.3: Die Hopf-Faserung. **10 Punkte**

Sei $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}^2/_\sim$ die komplex projektive Gerade, und sei S^2 die 2-Sphäre.

a) Zeigen Sie, daß die folgende Abbildung ein Diffeomorphismus ist,

$$\begin{array}{cccl} \psi & : & \mathbb{C}P^1 & \to & S^2 \\ & & [z_1 : z_2] & \mapsto & \begin{cases} \varphi_+^{-1}\left(\frac{z_1}{z_2}\right), & \text{falls } z_2 \neq 0 \\ P_+ = (0,0,1), & \text{falls } z_2 = 0, \end{cases} \end{array}$$

wobei $\varphi_+ : S^2 \setminus P_+ \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ die stereographische Projektion aus dem Nordpol P_+ ist und $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert wird.

b) Zeigen Sie, daß die folgende Abbildung eine Submersion ist,

$$\begin{array}{cccc} \pi & : & S^3 \subset \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}P^1 \\ & & (z_1, z_2) & \longmapsto & [z_1 : z_2]. \end{array}$$

c) Was sind die Urbilder eines Punktes unter π und warum sind es Untermannigfaltigkeiten von S^3?

Zur Information: Die Abbildung $\pi : S^3 \to \mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ heißt *Hopf-Faserung*, benannt nach Heinz Hopf. Ihre Verallgemeinerung in beliebige Dimension sind die *Hopf-Bündel* $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$.

20 Punkte