Differentialgeometrie I — SS 2008
Thomas Leistner
Schwerpunkt Analysis und Differentialgeometrie
Geomatikum, Raum 222, Tel.: 42838 5147
leistner@math.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Department Mathematik

Übungsblatt 3: Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen

— Abgabe zum 25.4.2008 —

Aufgabe 3.1: Glatte Mannigfaltigkeiten und Untermannigfaltigkeiten. **10 Punkte**

Entscheiden Sie, ob die folgenden topologischen Räume — ausgestattet mit der durch den $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie — eine eine glatte Mannigfaltigkeit oder sogar eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) $\mathbb{Q}^2$,
b) $X := \{(x,y) \mid xy = 0\}$,
c) $V := \{(x,y) \mid |x| + |y| = 1\}$,
d) $S^1 := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$,
e) $Q := \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 < y < 1\}$

Aufgabe 3.2: Projektiver Raum (Fortsetzung von Aufgabe 2.2). **6 Punkte**

Sei $\mathbb{R}P^n$ der in der Vorlesung und auf dem vorigen Übungsblatt behandelte reell projektive Raum mit der kanonischen Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$.

a) Zeigen Sie, daß die auf dem vorigen Zettel definierten Paare (U_i, φ_i), $i = 0, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i := \{[(x_0,\ldots,x_n)] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\} &\to \mathbb{R}^n \\ [(x_0,\ldots,x_n)] &\mapsto \frac{1}{x_i}(x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n), \end{aligned}$$

eine glatte Struktur auf $\mathbb{R}P^n$ definieren.

b) Zeigen Sie, daß π eine glatte Abbildung ist.

c) Sei $f : \mathbb{R}P^n \to M$ eine Abbildung in eine glatte Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie daß f glatt ist genau dann, wenn $f \circ \pi$ glatt ist.

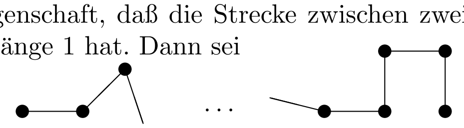
Aufgabe 3.3: Zusammenhängende Mannigfaltigkeiten. **4 Punkte**

Beweisen Sie daß eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit auch bogenzusammenhängend ist. *(Hinweis: Beweisen Sie, daß die Menge aller Punkte, die durch einen stetigen Weg mit einem festen Punkt verbunden werden können, offen und abgeschlossen ist.)*

Aufgabe 3.4: Der Konfigurationsraum eines Zollstocks. **4 Punkte**

Seien $P_1, \ldots, P_{n+1}$ Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, daß die Strecke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten, die mit $L_{P_i,P_{i+1}}$ bezeichnet sei, die Länge 1 hat. Dann sei

$$Z = L_{P_1,P_2} \cup L_{P_2,P_3} \cup \ldots L_{P_{n-1},P_n} \cup L_{P_n,P_{n+1}} =$$



der entsprechende Geradenzug aus n Geraden, oder auch der „Zollstock“. Bezeichne M die Menge aller solchen Geradenzüge. Begründen Sie durch Angabe von Koordinaten, warum M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ ist. Um welche Untermannigfaltigkeit handelt es sich dabei, und was ist ihre Dimension?

24 Punkte