Differentialgeometrie I — SS 2008
Thomas Leistner
Schwerpunkt Analysis und Differentialgeometrie
Geomatikum, Raum 222, Tel.: 42838 5147
leistner@math.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Department Mathematik

Übungsblatt 2: Topologische Räume

— Abgabe zum 18.4.2008 —

Aufgabe 2.1: Quotiententopologie. **10 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, Y eine Menge und $f : X \to Y$ eine surjektive Abbildung.

a) Beweisen Sie, daß $\mathcal{O}_f = \{V \in Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{O}\}$ eine Topologie auf Y definiert.

b) Sei weiterhin f offen (bezüglich $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_f$). Beweisen Sie:
   i) Wenn $(X, \mathcal{O})$ eine abzählbare Basis hat, so auch $(Y, \mathcal{O}_f)$.
   ii) $(Y, \mathcal{O}_f)$ ist Hausdorff, falls die Menge $D := \{(x, y) \mid f(x) = f(y)\}$ abgeschlossen ist bezüglich der Produkttopologie von $X \times X$.

   Beide Beweise wurden in der Vorlesung angedeutet. Schreiben Sie sie nochmal genau auf.

c) Sei $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein weiterer topologischer Raum und $h : (Y, \mathcal{O}_f) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ eine beliebige Abbildung. Zeigen Sie, daß h genau dann stetig ist, wenn die Komposition $h \circ f$ stetig ist.

Aufgabe 2.2: Projektive Räume. **10 Punkte**

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und sei $\mathbb{K}^{n+1}$ der entsprechende reelle oder komplexe Vektorraum, versehen mit der metrischen Standardtopologie. Auf $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ betrachtet man die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : \ x = \lambda y.$$

Bezeichne $[x] := \{y \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \mid y \sim x\}$ die Äquivalenzklasse eines Punktes $x \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Dann sind der reell- ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) und komplex- ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) projektive Raum gegeben durch

$$\mathbb{K}P^n := \{[x] \mid x \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}\}$$

zusammen mit der kanonischen Projektion

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{K}P^n \\ x & \mapsto & [x]. \end{array}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der ersten Aufgabe, daß die projektiven Räume $\mathbb{K}P^n$ eine abzählbare Basis haben und Hausdorff sind.

b) Für $i = 0, \ldots, n$ betrachten wir die folgende Mengen U_i in $\mathbb{K}P^n$:

$$U_i := \{[x] \in \mathbb{K}P^n \mid x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \text{ mit } x_i \neq 0\}.$$

   Zeigen Sie, daß die U_i's offen in $\mathbb{K}P^n$ sind und daß die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i : U_i & \to & \mathbb{K}^n \\ [(x_0, \ldots, x_n)] & \mapsto & \dfrac{1}{x_i}(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \end{array}$$

   wohl-definierte Homöomorphismen sind.

20 Punkte