Differentialgeometrie I — SS 2008
Thomas Leistner
Schwerpunkt Analysis und Differentialgeometrie
Geomatikum, Raum 222, Tel.: 42838 5147
leistner@math.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Department Mathematik

Übungsblatt 12: Krümmung

— Abgabe zum 04.07.2008 —

Aufgabe 12.1: Semi-Riemannsche Kegel. **10 Punkte**

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung $c \neq 0$ (z.B. die Sphäre oder der hyperbolische Raum vom Radius $1/\sqrt{|c|}$). Beweisen Sie, daß die semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\hat{M}, \hat{g})$, die gegeben ist durch

$$\left(\hat{M} = \mathbb{R}^+ \times M \ , \ \hat{g} = \frac{1}{c} dr^2 + r^2 \cdot \pi^* g \right),$$

flach ist. Hierbei bezeichne $\hat{M} = \mathbb{R}^+ \times M$ die Produktmannigfaltigkeit aus den die positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}^+$ und M, sowie $r : \hat{M} = \mathbb{R}^+ \times M \to \mathbb{R}^+$ und $\pi : \hat{M} = \mathbb{R}^+ \times M \to M$ die kanonischen Projektionen auf $\mathbb{R}^+$ bzw. M.
Für $c < 0$ handelt es sich um eine Lorentzmannigfaltigkeit. $(\hat{M}, \hat{g})$ heißt raumartiger $(c > 0)$ oder zeitartiger $(c < 0)$ Kegel über (M, g).

Hinweis: Da $\hat{M} = \mathbb{R}^+ \times M$ eine Produktmannigfaltigkeit ist, kann man jeden Tangentialvektor $\hat{X} \in T_{(r,p)}\hat{M}$ schreiben als $\hat{X} = a\frac{\partial}{\partial r} + X$ mit $X \in T_pM$. Die Metrik ist dann gegeben durch

$$\hat{g}_{(r,p)}(a\frac{\partial}{\partial r} + X, b\frac{\partial}{\partial r} + Y) = \frac{ab}{c} + g_p(X, Y)$$

für $X, Y \in T_pM$. Sie können dann die Koszul-Formel oder die Christoffelsymbole nutzen, um den Levi-Civita Zusammenhang und die Krümmung von $\hat{g}$ durch die von von g auszudrücken. Natürlich können Sie auch direkt eine lokale Isometrie auf den flachen Raum angeben.

Aufgabe 12.2: Ebene Wellen. **12 Punkte**

Wir betrachten den $\mathbb{R}^{n+2}$ mit den globalen Koordinaten $(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ und die Metrik g auf $\mathbb{R}^{n+2}$, die gegeben ist durch

$$g = 2dx_0dx_{n+1} + f dx_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^{n} dx_i^2,$$

wobei f ein homogenes quadratisches Polynom in den Unbekannten $(x_1, \ldots, x_n)$ ist, d.h. $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ mit Konstanten a_{ij}.

a) Finden Sie einen orthonormalen Rahmen. Was ist der Index von g?

b) Weisen Sie durch Berechnung der Krümmung nach, daß $(\mathbb{R}^{n+2}, g)$ im Allgemeinen nicht flach ist.

c) Für welche Tangentialebenen verschwindet die Schnittkrümmung, und für welche nicht?

d) Berechnen Sie die Ricci-Krümmung.

e) Zeigen Sie, daß die Skalarkrümmung von $(\mathbb{R}^{n+2}, g)$ verschwindet.

Die Metrik g ist ein Spezialfall einer Metrik, die man in vier Dimensionen als *ebene Gravitationswelle* bezeichnet.

22 Punkte