Differentialgeometrie I — SS 2008
Thomas Leistner
Schwerpunkt Analysis und Differentialgeometrie
Geomatikum, Raum 222, Tel.: 42838 5147
leistner@math.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Department Mathematik

Übungsblatt 11: Produktmannigfaltigkeiten und Krümmung

— Abgabe zum 27.06.2008 —

Aufgabe 11.1: semi-Riemannsche Produktmannigfaltigkeiten. **16 Punkte**

Seien (M, g^N) und (N, g^N) zwei semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten, $M \times N$ die Produktmanngfaltigkeit, d.h. das Produkt der beiden topologischen Räume ausgestattet mit der differenzierbaren Produktstruktur (siehe eine der ersten Vorlesungen). Seien weiterhin μ und ν die kanonischen Projektionen, d.h.

$$M \times N \ni (p,q) \begin{array}{l} \overset{\mu}{\nearrow} \quad p \in M \\ \\ \overset{\nu}{\searrow} \quad q \in N \end{array}$$

Beide sind glatte Abbildungen mit Hilfe derer man eine semi-Riemannsche Metrik auf $M \times N$ definieren kann, die sogenannte Produktmetrik:

$$g := \mu^*(g^M) + \nu^*(g^N)$$

Beweisen Sie nun folgende Eigenschaften:

a) Für jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ existiert ein Vektorfeld $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M \times N)$ mit den Eigenschaften

$$d\mu|_{(p,q)}(\widetilde{X}(p,q)) = X(p) \text{ und } d\nu|_{(p,q)}(\widetilde{X}(p,q)) = 0.$$

Enstprechendes gilt für jedes $U \in \mathfrak{X}(N)$. $\widetilde{X}$ und $\widetilde{U}$ heißen *Lifts* oder *Hebungen* von X und U.

b) Für jedes $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $U, V \in \mathfrak{X}(N)$ gilt dann: $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ ist der Lift von $[X, Y]$, $[\widetilde{U}, \widetilde{V}]$ der von $[U, V]$ und $[\widetilde{X}, \widetilde{U}] = 0$.

c) Seien ∇^M und ∇^N die Levi-Civita-Zusammenhänge von (M, g^M) und (N, g^N) und ∇ der von $(M \times N, g)$. Für jedes $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $U, V \in \mathfrak{X}(N)$ gilt dann

   i) $\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$ ist der Lift von $\nabla^M_X Y$ und $\nabla_{\widetilde{U}} \widetilde{V}$ der von $\nabla^N_U V$,

   ii) $\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{U} = \nabla_{\widetilde{U}} \widetilde{X} = 0$

d) Seien $\mathcal{R}^M$ und $\mathcal{R}^N$ die $(4,0)$-Krümmungstensoren von (M, g^M) und (N, g^N) und $\mathcal{R}$ der von $(M \times N, g)$. Dann gilt $\mathcal{R} = \mu^*(\mathcal{R}^M) + \nu^*(\mathcal{R}^N)$.

Aufgabe 11.2: Flacher und nicht-flacher Torus. **6 Punkte**

Sei $T^2 := \{(2 + \cos\varphi)\cos\theta, (2 + \cos\varphi)\sin\theta, \sin\varphi) \mid \varphi, \theta \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{R}^3$ der Rotationstorus in $\mathbb{R}^3$, und sei $C^2 = \{(\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\theta, \sin\theta) \mid \varphi, \theta \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{R}^4$ der sogenannte *Clifford torus* in $\mathbb{R}^4$. Sie seien jeweils ausgestattet mit den Riemannschen Metriken g_{T^2} und g_{C^2}, die durch die jeweiligen euklidischen Skalarprodukte im $\mathbb{R}^3$ und im $\mathbb{R}^4$ induziert werden. Zeigen Sie, daß (C^2, g_{C^2}) flach ist und (T^2, g_{T^2}) nicht.

24 Punkte