Differentialgeometrie I — SS 2008
Thomas Leistner
Schwerpunkt Analysis und Differentialgeometrie
Geomatikum, Raum 222, Tel.: 42838 5147
leistner@math.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Department Mathematik

Übungsblatt 10: Levi-Civita Zusammenhang

— Abgabe zum 20.06.2008 —

Aufgabe 10.1: Lokale orthonormale Rahmen. **4 Punkte**

Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß es um jeden Punkt $p \in M$ einen *lokalen orthonormalen Rahmen* gibt, d.h. es existiert eine Umgebung U von p und Vektorfelder $E_1, \ldots E_n \in \mathfrak{X}(U)$, so daß für alle $q \in U$ die Vektoren $(E_1(q), \ldots, E_n(q))$ eine Basis für T_qM bilden mit $g(E_i, E_j) \equiv \epsilon_i \delta_{ij}$ mit $\epsilon_i = \pm 1$.

Aufgabe 10.2: Killingvektorfelder und Divergenz. **6 Punkte**

Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇^g und sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld.

a) Zeigen Sie, daß X genau dann ein Killingvektorfeld ist, wenn die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & C^\infty(M) \\ (U, V) & \mapsto & g(\nabla_U X, V) \end{array}$$

ein schiefsymmetrisches $(2, 0)$-Tensorfeld ist.

b) Die Divergenz von X, $div(X)$, ist eine Funktion auf M, definiert durch

$$M \ni p \mapsto div(X)(p) := \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i g_p(\nabla^g_{e_i} X, e_i),$$

für $(e_1, \ldots, e_n)$ eine orthonormale Basis in T_pM, d.h. eine Basis mit $g_p(e_i, e_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$. Wegen Aufgabe **10.1** ist $div(X)$ eine glatte Funktion. Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}_X g = \frac{2}{n} div(X) g$, falls X ein konformes Vektorfeld ist.

Aufgabe 10.3: Die Volumenform. **10 Punkte**

Sei (M, g) ein Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Zusammenhang ∇ und Volumenform ω^g.

a) Zeigen Sie, daß $\nabla \omega^g = 0$. (*Der lokale orthonormale Rahmen aus Aufgabe* **10.1** *ist dabei hilfreich.*)

b) Sei $\widetilde{\nabla}$ ein torsionsfreier Zusammenhang auf M der Folgendes erfüllt:

   i) $\widetilde{\nabla} \omega^g = 0$ und

   ii) es existiert eine 1-Form, d.h. ein glattes $(1, 0)$-Tensorfeld, θ, so daß $(\widetilde{\nabla}_X g)(Y, Z) = g(X, Y)\theta(Z) + g(X, Z)\theta(Y)$.

   Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen $\widetilde{\nabla}$ metrisch ist, d.h. gleich dem Levi-Civita Zusammenhang ist. *(Hinweis: Schreiben Sie $\widetilde{\nabla} = \nabla + \phi$ für einen $(2, 1)$-tensor ϕ und werten Sie dann i) und ii) aus.)*

20 Punkte