Differentialgeometrie I — SS 2008
Thomas Leistner
Schwerpunkt Analysis und Differentialgeometrie
Geomatikum, Raum 222, Tel.: 42838 5147
leistner@math.uni-hamburg.de

Universität Hamburg
Department Mathematik

Übungsblatt 1: Topologische Räume

— Abgabe zum 11.4.2008 —

1 Definition. Sei X eine Menge. Eine *Topologie* $\mathcal{O}$ *auf* X ist ein System von Teilmengen von X mit den folgenden drei Eigenschaften:

a) Die leere Menge $\emptyset$ und die Menge X selbst sind in $\mathcal{O}$.

b) Sind U und V zwei Mengen aus $\mathcal{O}$, so auch deren Durchschnitt $U \cap V$.

c) Seien U_ι Mengen aus $\mathcal{O}$, mit ι aus einer beliebigen Indexmenge $\mathcal{I}$. Dann ist auch deren Vereinigung $\cup_{\iota \in \mathcal{I}} U_\iota$ in $\mathcal{O}$.

Die Mengen aus $\mathcal{O}$ heißen *offen*.

Aufgabe 1.1: Die metrische Topologie. — 3 Punkte

Sei (X, d) ein metrischer Raum, wobei d die Metrik bezeichne. D.h. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften: (1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$, (2) $d(x, y) = d(y, x)$, und (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Weisen Sie nach, daß

$$\mathcal{O}_d := \Big\{ U \subset X \mid \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) := \{ y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon \} \subset U \Big\}$$

eine Topologie auf X definiert, die sogenannte *metrische Topologie*.

Aufgabe 1.2: Relativtopologie. — 3 Punkte

Sei $(X, \mathcal{O})$ einn topologischer Raum und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Weisen Sie nach, daß

$$\mathcal{O}_Y := \{ V \subset Y \mid \exists U \in \mathcal{O} : V = U \cap Y \}$$

eine Topolgie auf Y definiert, die *Relativ-* oder *Teilmengentopologie*.

2 Definition. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein Topolgischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.

a) A heißt *abgeschlossen*, falls $X \setminus A$ offen ist.

b) Das *Innere* von A ist definiert als $int(A) := \{ x \in A \mid \exists U \in \mathcal{O} : x \in U \text{ und } U \subset A \}$.

c) Der *Abschluß* von A ist definiert als $cl(A) := X \setminus int(X \setminus A)$.

Aufgabe 1.3: Inneres und Abschluß. — 6 Punkte

Zeigen Sie, daß offene Mengen gleich ihrem Inneren sind und abgeschlossene Mengen gleich ihrem Abschluß sind. Beweisen Sie außerdem

a) $int(A) = \bigcup_{U \subset A, U \text{ offen}} U$, d.h. $int(A)$ ist die größte offene Menge in A.

b) $cl(A) = \bigcup_{A \subset F, F \text{ abgeschl.}} F$, d.h. $cl(A)$ ist die kleinste abgeschlossene Menge die A enthält.

3 Definition. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) f heißt *stetig* genau dann, wenn $f^{-1}(U)$ offen ist für alle offenen Mengen $U \subset Y$.

b) f heißt *folgenstetig* genau dann, wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus X, die gegen ein $x \in X$ konvergiert, auch die Folge $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. (für *Konvergenz*, siehe Vorlesung).

Aufgabe 1.4: Stetige Abbildungen. **6 Punkte**

Beweisen Sie das Folgende:

a) f ist stetig genau dann wenn Urbilder von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind.

b) f ist folgenstetig, falls f stetig ist.

Aufgabe 1.5: Diskrete und antidiskrete Topologie. **6 Punkte**

Sei X eine Menge mit mindestens zwei Elementen, $\mathcal{O}_1 = \{Y \subset X\} = \mathcal{P}(X)$ die diskrete und $\mathcal{O}_2 := \{\emptyset, X\}$ die antidiskrete Topologie auf X. Welche von beiden ist metrisierbar und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

(Erinnerung: Eine Topologe $\mathcal{O}$ heißt *metrisierbar* falls es eine Metrik d auf X gibt, so daß $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$.)

24 Punkte