Komplexe Kurvenintegrale

Komplexe Integration analog zu **Kurvenintegralen**:
Sei $c : [a, b] \to D \subset \mathbb{R}^n$ ein stückweiser $\mathcal{C}^1$–Weg, $f : D \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann hatten wir in Analysis II/III die beiden Kurvenintegrale 1. und 2. Art

$$\int_c f(\mathbf{x})ds = \int_a^b f(c(t))\|\dot{c}\|\,dt \quad \text{bzw.} \quad \int_c \mathbf{F}(\mathbf{x})\,d\,\mathbf{x} = \int_a^b \langle \mathbf{F}(c(t)), \dot{c}(t)\rangle\,dt$$

Definition

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und $c : [a, b] \to D$ ein stückweiser $\mathcal{C}^1$–Weg. Dann ist

$$\int_c f(z)\,dz = \int_a^b f(c(t))\dot{c}(t)\,dt$$

das komplexe Integral von $f(z)$ längs der Kurve c.

Eigenschaften der komplexen Integration

1) Der Wert des komplexen Integrals ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve.
2) Bei Änderung der Durchlaufrichtung gilt

$$\int_{-c} f(z)\,dz = -\int_c f(z)\,dz$$

Hier ist $(-c)(t) = c(b + t(a - b))$, $0 \le t \le 1$.

3) Linearität

$$\int_c (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha \int_c f(z)\,dz + \beta \int_c g(z)\,dz \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

4) Additivität bzgl. des Integrationsweges:

$$\int_{c_1+c_2} f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_2} f(z)\,dz$$

Eigenschaften der komplexen Integration II

5) Es gilt die Abschätzung

$$\left| \int_c f(z)\, dz \right| \leq \sup_{z \in \mathrm{Bild}(c)} |f(z)| \cdot \underbrace{\int_a^b |\dot{c}(t)|\, dt}_{\text{Bogenlänge } L(c)} .$$

Beweis

Man berechnet direkt

$$\begin{aligned} \left| \int_c f(z)\, dz \right| &= \left| \int_a^b f(c(t))\dot{c}(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(c(t))||\dot{c}(t)|\, dt \leq \sup_{a \leq t \leq b} |f(c(t))| \cdot \int_a^b |\dot{c}(t)|\, dt \end{aligned}$$

Komplexe Integration – Beispiele

Beispiel

Sei $f(z) = z$ und $c(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \oint_c z\, dz &= \int_0^{2\pi} re^{it} \cdot \left(rie^{it} \right) dt \\ &= ir^2 \int_0^{2\pi} e^{2it}\, dt \\ &= ir^2 \int_0^{2\pi} (\cos(2t) + i \sin(2t))\, dt \\ &= -r^2 \int_0^{2\pi} \sin(2t))\, dt + i\, r^2 \int_0^{2\pi} \cos(2t))\, dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Komplexe Integration – Beispiele II

Beispiel

Sei $f(z) = \bar{z}$ und $c(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

$$\oint_c \bar{z}\, dz = \int_0^{2\pi} re^{-it} \cdot \left(rie^{it}\right) dt = ir^2 \int_0^{2\pi} dt = r^2 \cdot 2\pi i.$$

Beispiel

Sei $f(z) = 1/z$ und $c(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt

$$\oint_c \frac{1}{z}\, dz = \oint_c \frac{\bar{z}}{|z|^2}\, dz = \frac{1}{r^2} \oint_c \bar{z}\, dz = 2\pi i.$$

Beispiel

Es gilt mit $c(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ die Beziehung

$$\oint_c (z - z_0)^n\, dz = \begin{cases} 2\pi i & : \text{ für } n = -1 \\ 0 & : \text{ für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

Komplexe Integration – Beispiele III

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} \oint_c (z - z_0)^n\, dz &= \int_0^{2\pi} \left(re^{it}\right)^n \cdot \left(rie^{it}\right) dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt \\ &= r^{n+1} \left(-\int_0^{2\pi} \sin((n+1)t))\, dt + i \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t))\, dt \right) \\ &= \begin{cases} 2\pi i & : \text{ für } n = -1 \\ 0 & : \text{ für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases} \end{aligned}$$

Nur für $n = -1$ verschwindet das Integral nicht und es gilt

$$\oint_c \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i.$$

Frage: Woran liegt das?

Integration von Reihen

Satz

Ist $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ *eine Reihe stetiger Funktionen, die auf dem Gebiet* $D \subset \mathbb{C}$ **gleichmäßig konvergiert**, *und ist* $c : [a,b] \to D$ *ein stückweiser* $\mathcal{C}^1$*–Weg, so gilt*

$$\int_c f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_c f_k(z)\,dz.$$

Beweis

Da die Reihe stetiger Funktionen gleichmäßig konvergiert, ist auch die Grenzfunktion $f(z)$ *stetig und daher auch integrierbar und*

$$\int_c f(z)\,dz - \sum_{k=0}^{n} \int_c f_k(z)\,dz = \int_c R_n(z)\,dz.$$

Integration von Reihen II

Beweis (Fortsetzung)

Gleichmäßige *Konvergenz bedeutet:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, N(\varepsilon) \;:\; \forall\, n \geq N,\, z \in D \;:\; |R_n(z)| < \varepsilon.$$

Komplexe Integrale

Beweis

Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt sofort

$$\left| \int_c R_n(z)\, dz \right| \leq \varepsilon \cdot L(c)$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} \int_c R_n(z)\, dz = 0.$$

□

Beispiel

Sei $c(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ und $|z_0| > r$. Dann gilt:

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z - z_0}\, dz = 0.$$

Beachte: Der Punkt z_0 liegt außerhalb des Kreises $c(t)$.

Komplexe Integrale

Beispiel (Fortsetzung)

Man berechnet unter Verwendung der geometrischen Reihe:

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \frac{dz}{1 - \frac{z}{z_0}} = -\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k} z^k\, dz,$$

denn es gilt

$$\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1.$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gilt

$$\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^k} z^k\, dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{k+1}} \oint_{|z|=r} z^k\, dz = 0$$

da man Integration und Summation vertauschen kann.

Beispiel zur Vorbereitung der Laurent–Reihe

Beispiel (Vorgriff auf die Laurent–Reihe)

Eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{\text{analog zur Taylor–Reihe}} + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k}_{\text{negative Potenzen}}$$

nennt man eine **Laurent–Reihe**. Sie konvergiert lokal gleichmäßig und absolut in einem Kreisring

$$0 \leq R_1 < |z - z_0| < R_2.$$

Für $R_1 < r < R_2$ und $c(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ gilt daher

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^k\,dz = 2\pi\, i\, a_{-1}.$$

Cauchyscher Integralsatz

Wir hatten im Abschnitt 3.1 mit der Kurve $c(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ die Aussage

$$\oint_c (z - z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi i & : \text{ für } n = -1 \\ 0 & : \text{ für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases}$$

Frage: Wann verschwindet das Integral über geschlossene Kurven?

Satz (Cauchyscher Integralsatz)

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein **einfach zusammenhängendes** *Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine* **holomorphe** *Funktion und $c : [a, b] \to G$ eine* **geschlossene** *stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve, so gilt stets*

$$\oint_c f(z)\,dz = 0.$$

Zum Cauchyschen Integralsatz

Bemerkung

Alle drei **(fett gedruckten)** *Voraussetzungen sind notwendig:*

1) *Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist* **nicht** *holomorph und es gilt:*
$$\oint\limits_{|z|=1} \bar{z}\, dz \neq 0.$$

2) *Das Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z \neq 0\}$ ist* **nicht** *einfach zusammenhängend und es gilt:*
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz \neq 0.$$

3) *Die Kurve c ist* **nicht** *geschlossen und es gilt:*
$$\int\limits_c z\, dz \neq 0, \quad c(t) = e^{(1+i)t}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Beweis des Cauchyschen Integralsatzes

Beweis

Wir setzen $c(t) = (x(t), y(t))^T$ und $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$:

$$\begin{aligned}\oint\limits_c f(z)\, dz &= \int\limits_a^b (u\dot{x} - v\dot{y})\, dt + i \int\limits_a^b (u\dot{y} + v\dot{x})\, dt \\ &= \oint\limits_c \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} d\,\mathbf{x} + i \oint\limits_c \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} d\,\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Bei beiden Vektorfelder $(u,-v)^T$ und $(v,u)^T$ ist wegen der CR–DGL's die Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = u_y + v_x = 0, \quad \operatorname{rot}\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = v_y - u_x = 0.$$

Daher existiert ein **Potential** *und beide Integrale sind wegen der* **geschlossenen Kurve** *c identisch gleich Null.* $\square$

Wegunahängige Integrale

Korollar

Ist $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f(z)$ holomorph auf G und $c_1, c_2 : [a,b] \to G$, so folgt aus $c_1(a) = c_2(a)$ und $c_1(b) = c_2(b)$

$$\int_{c_1} f(z)dz = \int_{c_2} f(z)\,dz$$

d.h. das Integral $\int_c f(z)\,dz$ ist **wegunabhängig**.

Stammfunktionen

Satz (Existenz einer Stammfunktion)

Sei $G \subset \mathbb{C}$, $f(z)$ holomorph auf G, $z_0 \in G$ ein fester Punkt und setze für $z \in G$

$$F(z) = \int_{c_z} f(\xi)\,d\xi$$

mit einer beliebigen stückweisen $\mathcal{C}^1$–Kurve, die z_0 und z verbindet. Dann ist $F(z)$ eine **Stammfunktion** *von $f(z)$, d.h. es gilt*

$$F'(z) = f(z).$$

Stammfunktion II

Beweis

Es gilt

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{h}\int_{0}^{1} f(z+th)h\,dt$$

$$= \int_{0}^{1} f(z+th)\,dt.$$

Daraus folgt

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\int_{0}^{1} (f(z+th)-f(z))\,dt\right|$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} |f(z+th)-f(z)| \to 0$$

Stammfunktionen III

Korollar

Ist $f(z)$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G holomorph und $F(z)$ eine Stammfunktion von $f(z)$, so gilt für alle stückweisen $\mathcal{C}^1$–Kurven $c : [a,b] \to G$

$$\int_{c} f(z)\,dz = F(c(b)) - F(c(a)).$$

Beispiel

Wir betrachten mit $a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0$ das Integral

$$\int_{a-i\,b}^{a+i\,b} \frac{dz}{z^2}.$$

Die Funktion $f(z) = 1/z^2$ ist **holomorph** auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G mit

$$G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

Wegunabhängigkeit

Damit ist obenstehendes Integral **wegunabhängig**.
Beachte: Das Gebiet G ist gerade die komplexe Ebene ohne die negative reelle Achse.
Integration: Wir setzen $c(t) = a + i\,t$, $-b \leq t \leq b$ und erhalten

$$\int_c \frac{dz}{z^2} = \int_{-b}^{b} \frac{i}{(a+i\,t)^2}\,dt = -\left.\frac{1}{a+i\,t}\right|_{-b}^{b}$$

$$= \frac{1}{a-i\,b} - \frac{1}{a+i\,b} = \frac{2ib}{a^2+b^2}$$

Stammfunktion:

$$\int_{a-i\,b}^{a+i\,b} \frac{dz}{z^2} = \left(-\frac{1}{z}\right)\Bigg|_{a-i\,b}^{a+i\,b} = \frac{2ib}{a^2+b^2}.$$

Homotopie

Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $c, \tilde{c} : [a,b] \to G$ zwei geschlossene Wege (Kurven) in G. Man nennt c und $\tilde{c}$ **homotop**, falls eine stetige Abbildung $\Phi : [a,b] \times [0,1] \to G$ existiert mit

$$\begin{aligned} \Phi(t,0) &= c(t), \quad \Phi(t,1) = \tilde{c}(t) \quad \forall\, t \in [a,b] \\ \Phi(a,s) &= c(a), \quad \Phi(b,s) = c(b) \quad \forall\, s \in [0,1] \end{aligned}$$

Ein Weg heißt **nullhomotop** wenn er zum konstanten Weg homotop ist, d.h. wenn man den Weg stetig zum Punkt zusammenziehen kann.

Nullhomotope Wege

Bemerkung

Anstelle des einfachen Zusammenhangs genügt es, im Cauchyschen Integralsatz zu fordern, dass c **nullhomotop** *ist.*

Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz:
Sei $f(z)$ holomorph auf einem Gebiet G. Dann gilt für zwei geschlossene Wege c und $\tilde{c}$:

$$c, \tilde{c} \ \text{ homotop} \quad \Rightarrow \quad \oint_c f(z)\,dz = \oint_{\tilde{c}} f(z)\,dz.$$

Homotopie im Beispiel

Beispiel

Für jede einfach geschlossene Kurve c, die den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ (einmal) im positiven Sinn umläuft, gilt

$$\oint_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Denn $c(t)$ ist homotop zu $\tilde{c}(t) = z_0 + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Definition

Für eine geschlossene, stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ heißt

$$\mathrm{Uml}\,(c, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{dz}{z - z_0}$$

die **Umlaufzahl** von c bezüglich des Punktes z_0.
Die Umlaufzahl ist stets eine ganze Zahl und gibt an, wie oft der Weg c den Punkt z_0 im mathematisch positiven Sinne umläuft

Cauchysche Integralformel

Satz (Cauchysche Integralformel)

Sei $f(z)$ holomorph auf einem Gebiet G, $z_0 \in G$ und $c : [a, b] \to G \setminus \{z_0\}$ ein zum Punkt z_0 homotoper Weg, der z_0 im positiven Sinn einmal umläuft. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Beweis

Der Weg c läßt sich innerhalb von $G \setminus \{z_0\}$ auf einen Kreis $k_r(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ zusammenziehen. Daher gilt

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{k_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\, dt.$$

Cauchysche Integralformel – Beweis

Beweis

$$\begin{aligned} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz &= \oint_{k_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\, dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt. \end{aligned}$$

Im Grenzfall $r \to 0$ erhalten wir offensichtlich die Beziehung

$$i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt \to 2\pi i f(z_0).$$

Da das Integral $\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$ aber unabhängig von r ist, folgt

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0).$$