Teil III

Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen

Fourier–Methoden bei partiellen Differentialgleichungen

In diesem Kapitel untersuchen wir allgemeine Fourier–Methoden zur (approximativen) Lösung von Anfangs–, Randwert– und Anfangsrandwertaufgaben.

Gegeben sei das eindimensionale Randwertproblem:

$$
\begin{aligned}
-T\,\frac{d^2u}{dx^2} &= f(x), \quad 0 < x < \ell \\
u(0) &= 0 \\
u(\ell) &= 0
\end{aligned}
$$

Anwendung: Die Lösung $u(x)$ beschreibt die Gleichgewichtslage eines eingespannten hängenden Seils mit Spannung T und extern angreifender Kraft $f(x)$.

Fourier – Methoden, Spezialfall

Wir betrachten zunächst den **Spezialfall**:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

mit vorgegebenen Koeffizienten $c_1, \ldots, c_N$.
Die Inhomogenität $f(x)$ erfüllt insbesondere die homogenen Randbedingungen

$$f(0) = f(\ell) = 0$$

und wir suchen daher eine Lösung des Randwertproblems in der Form

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Damit sind die homogenen Randbedingungen für **alle** Lösungskoeffizienten $b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}$ erfüllt und wir versuchen die b_n's so zu bestimmen, dass $u(x)$ eine Lösung der vorgegebenen DGL ist.

Fourier – Methoden, Spezialfall III

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{Tn^2\pi^2}{\ell^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Für die Koeffizienten $b_1, \dots, b_N$ gilt also

$$b_n = \frac{\ell^2 c_n}{Tn^2\pi^2}, \quad n = 1, \dots, N$$

und wir erhalten demnach als Lösung des Randwertproblems

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\ell^2 c_n}{Tn^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Beispiel

Für die Inhomogenität $f(x) = \sin(\pi x) - 2\sin(2\pi x) + 5\sin(3\pi x)$ und $\ell = T = 1$ lautet die Lösung

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) - \frac{1}{2\pi^2}\sin(2\pi x) + \frac{5}{9\pi^2}\sin(3\pi x).$$

Allgmeiner Fall

Der allgemeine Fall:
Approximiere $f(x)$ durch eine **endliche Fourier–Reihe** $f_N(x)$, d.h.

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

mit den **Fourier–Koeffizienten**

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\,dx, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Siehe Analysis II: Fourier–Reihen (Kapitel 10, 11)
Eine **approximative Lösung** des Randwertproblems mit Inhomogenität $f(x)$ ist dann gegeben durch:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\ell^2 c_n}{T n^2 \pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Beispiel

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dx^2} &= x, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Die exakte Lösung läßt sich durch **Integration** berechnen:

$$u'(x) = -\frac{x^2}{2} + a \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\frac{x^3}{6} + ax + b.$$

Mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ folgt:

$$u(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(1 - x^2).$$

Fourier – Methoden, Randwertproblem II

Beispiel (Fortsetzung)

Wir berechnen die Fourier–Koeffizienten der Funktion $f(x) = x$, also

$$c_n = 2\int_0^1 x \sin(n\pi x)\, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Damit ergibt sich eine **approximative** Lösung in der Form

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{n^2\pi^2} \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3} \sin(n\pi x).$$

Wir erhalten etwa

$$u_4(x) = \frac{2}{\pi^3}\sin(\pi x) - \frac{1}{4\pi^3}\sin(2\pi x) + \frac{2}{27\pi^3}\sin(3\pi x) - \frac{1}{32\pi^3}\sin(4\pi x)$$

Approximationsgüte

Frage: Wie gut ist die approximative Lösung?
Antwort: Berechne die Fourier–Koeffizienten der exakten Lösung: mit

$$u(x) = \frac{1}{6}x(1 - x^2)$$

folgt für die Fourier–Reihe

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(n\pi x)$$

die Darstellung der Fourier–Koeffizienten

$$a_n = 2\int_0^1 \frac{1}{6}x(1 - x^2)\sin(n\pi x)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}.$$

Dies sind aber gerade die (Fourier–)Koeffizienten der **approximativen** Lösung!

Fourier–Methoden und Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten folgendes Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & : \ 0 < x < \ell,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) = g(x) & : \ 0 \le x \le \ell \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \end{cases}$$

und suchen eine Lösung in Form einer Fourier–Reihe, also

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

Bemerkung

Da wir nur Sinus–Funktionen in der Fourier–Reihe verwenden, sind die vorgegebenen homogenen Randbedingungen automatisch erfüllt.

Fourierdarstellung der Inhomogenität

Für die Koeffizienten der Fourier–Reihe gilt wiederum

$$a_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\, dx.$$

Gleichzeitig können wir die Inhomogenität $f(x,t)$ in einer Fourier–Reihe darstellen, d.h.

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad c_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\, dx.$$

Wir berechnen nun die Orts– und Zeitableitungen des Lösungsansatzes

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

und erhalten

Fourierdarstellung der Inhomogenität II

die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n\pi}{\ell} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t)\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

und wir erhalten durch Gleichsetzen mit der Fourier–Reihe von $f(x,t)$

ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t)\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} = c_n(t).$$

Die Anfangsbedingungen $a_1(0), a_2(0), \ldots$ ergeben sich aus der Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\, dx$$

und daher

$$a_n(0) = b_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Damit haben wir ein Anfangswertproblem für ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das zudem entkoppelt ist.

Fourierdarstellung der Inhomogenität IV

Die Lösung läßt sich also direkt angeben:

$$a_n(t) = b_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\cdot t\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\cdot(t-s)\right) c_n(s)\, ds.$$

Beispiel

Wir betrachten das homogene Anfangsrandwertproblem

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t & = & u_{xx} & : \ 0 < x < 50,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) & = & 5 - \frac{1}{5}|x-25| & : \ 0 \le x \le 50 \\ u(0,t) & = & u(50,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \end{array}\right. .$$

Die Berechnung der Fourier–Koeffizienten von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x-25|$ ergibt

$$b_n = \frac{1}{25}\int_0^{50}\left(5 - \frac{1}{5}|x-25|\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right)\, dx = \frac{40}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Da wir eine homogene Wärmeleitungsgleichung betrachten, folgt

$$a_n(t) = \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500} \cdot t\right)$$

und die Lösung als Fourier–Reihe lautet

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500} \cdot t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right).$$

Beobachtung:

1. Für festes $T > 0$ fallen die Fourier–Koeffizienten $a_n(t)$ der Lösung exponentiell schnell für $n \to \infty$ ab. Höhere Werte für n beschreiben gerade die höheren Frequenzen in der Lösung.
2. Für festes n fallen die Fourier–Koeffizienten exponentiell schnell für $t \to \infty$ ab. Der Abfall ist umso schneller, je größer n ist. Für große Zeiten beschreiben also wenige Terme der Fourier–Reihe die exakte Lösung sehr gut.

Inhomogenes Anfangswertproblem

Beispiel

Wir betrachten das inhomogene Anfangsrandwertproblem

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & x & : \ 0 < x < 1,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) & = & 0 & : \ 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) & = & u(1,t) = 0 & : \ 0 \le t \le T \end{array}\right. .$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen von oben

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ c_n(t) &= c_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned}$$

und damit

$$a_n(t) = 2\int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-s)} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\, ds = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\left(1 - e^{-n^2\pi^2 t}\right).$$