Formel von d'Alembert im Beispiel

Beispiel

Wir betrachten das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = \sin x, u_t = \cos x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} .$$

Nach der Formel von d'Alembert ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos(y)dy \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2}(\sin(x+t) - \sin(x-t)) \\ &= \sin(x+t). \end{aligned}$$

Die Reflektionsmethode

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = g, \ \ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$

mit vorgegebenen Funktionen g und h mit $g(0) = h(0) = 0$.

Idee:

Erweitere das Halbraumproblem auf ein Ganzraumproblem und verwende die Formel von d' Alembert. Definiere eine Funktion $\tilde{u}(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ durch

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & (x \geq 0, t \geq 0) \\ -u(-x,t) & (x \leq 0, t \geq 0) \end{cases} .$$

Reflektion der Daten

Analog werden die gegebenen Anfangsdaten **reflektiert**:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & (x \geq 0) \\ -g(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & (x \geq 0) \\ -h(-x) & (x \leq 0) \end{cases} .$$

Damit erhalten wir für die Funktion $\tilde{u}$ das **Anfangswertproblem**

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ \tilde{u} = \tilde{g},\ \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

und nach der Lösungsformel nach d'Alembert gilt

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy.$$

rechtslaufende Wellen

Für $x \geq 0$ haben wir gerade die Lösung des Ausgangsproblems, i.e.

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t).$$

Fallunterscheidung:
1) Ist $x \geq t \geq 0$, so folgt $x - t \geq 0$ und daher

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy \\ &= \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy \end{aligned}$$

denn für positive Argumente stimmen die Funktionen g und $\tilde{g}$ beziehungsweise h und $\tilde{h}$ überein.

linkslaufende Wellen

2) Ist $0 \le x \le t$, so folgt $x - t \le 0$ und daher

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy \\ &= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(-(x-t))\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{0} \tilde{h}(y)dy + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x+t} \tilde{h}(y)dy \\ &= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x)\right) - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t-x} h(y)dy + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x+t} h(y)dy \\ &= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{x+t} h(y)dy \end{aligned}$$

Gesamtlösung

Wir erhalten also als Lösung des Ausgangsproblems

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy & x \ge t \ge 0 \\ \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x+t}^{x+t} h(y)dy & 0 \le x \le t \end{cases}$$

Beispiel

Die Lösung des ARWP

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ u = 0,\ u_t = \sin x & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0,\infty) \end{cases}$$

lautet

Gesamtlösung II

Beispiel

Die Lösung des ARWP

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ u = 0,\ u_t = \sin x & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0,\infty) \end{cases}$$

lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\cos(x-t) - \cos(x+t))$$

Gesamtlösung im Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

Die Lösung des ARWP

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ u = 0,\ u_t = \sin x & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0,\infty) \end{cases}$$

lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\cos(x-t) - \cos(x+t))$$

Sphärische Mittelung

Wir betrachten nun den höherdimensionalen Fall $n \geq 2$ und suchen eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Idee:
Leite durch geeignete **sphärische Mittelungen** eine vereinfachte Differentialgleichung ab, die dann eine explizite Lösungsformel für die höherdimensionale Wellengleichung liefert.
Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $r > 0$ definieren wir den **Mittelwert** von $u(x, t)$ über die Sphäre $\partial B(x, r)$,

$$U(x; r, t) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y, t) dS(y).$$

Sphärische Mittelung II

Weiter sei

$$\begin{cases} G(x; r) = \fint_{\partial B(x,r)} g(y) dS(y) \\ H(x; r) = \fint_{\partial B(x,r)} h(y) dS(y) \end{cases}$$

Satz

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest und u eine Lösung der obenstehenden Wellengleichung. Dann löst $U(x; r, t)$ die **Euler–Poisson–Darboux Gleichung**

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ U = G, \ U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases}.$$

Sphärische Mittelung III

Beweis

Einer früheren Beobachtung folgende (siehe Seite 74 des Skripts) gilt

$$U_r(x; r, t) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y, t)\, dy.$$

Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Da u eine Lösung der Wellengleichung ist, folgt

$$U_r(x; r, t) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} u_{tt}(y, t)\, dy$$

und damit

$$r^{n-1} U_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int\limits_{B(x,r)} u_{tt}\, dy.$$

Daraus folgt aber

$$(r^{n-1} U_r)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1} \fint_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1} U_{tt}.$$

Fassen wir dieses Ergebnis zusammen, so löst U in der Tat die Gleichung

Beweis II

Beweis (Fortsetzung)

Fassen wir dieses Ergebnis zusammen, so löst U in der Tat die Gleichung

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0.$$

□

Kirchhoffsche Formel

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung lautet:

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} (th(y) + g(y) + Dg(y)\cdot(y-x))\, dS(y) \quad (x \in \mathbb{R}^3, t > 0).$$

Herleitung über die Euler–Poisson–Darboux Gleichung:
Wir definieren

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= rU \\ \tilde{G} &= rG, \quad \tilde{H} = rH \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r\left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right) = rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}.$$

Kirchhoffsche Formeln II

Also löst $\tilde{U}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G},\ \tilde{U}_t = \tilde{H} & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \tilde{U} = 0 & \text{auf } \{r = 0\} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Mit der Lösungsformel für das Halbraumproblem folgt für $0 \leq r \leq t$ die Darstellung

$$\tilde{U}(x; r, t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)\right] + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy.$$

Da $U(x; r, t)$ aus $u(x, t)$ durch sphärische Mittelung entsteht, gilt

$$u(x, t) = \lim_{r \to 0} U(x; r, t).$$

Kirchhoffsche Formeln III

Mit der Definition von $\tilde{U}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \to 0} \frac{\tilde{U}(x; r, t)}{r} \\ &= \lim_{r \to 0} \left(\frac{\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy \right) \\ &= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) \end{aligned}$$

Verwendet man die Definitionen von G und H, so erhält man

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t}(tG(x; t)) + tH(x; t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(t ⨍_{\partial B(x,t)} g dS \right) + t ⨍_{\partial B(x,t)} h dS. \end{aligned}$$

Kirchhoffsche Formel IV

Nun gilt

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(y)dS(y) = \fint_{\partial B(0,1)} g(x+tz)dS(z)$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(x,t)} gdS\right) &= \fint_{\partial B(0,1)} Dg(x+tz)\cdot z dS(z) \\ &= \fint_{\partial B(x,t)} Dg(y)\cdot\left(\frac{y-x}{t}\right)dS(y)\end{aligned}$$

Setzen wir dies in dies in die letzte Gleichung auf Seite 136 ein, so erhalten

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \fint_{\partial B(x,t)} tDg(y)\cdot\left(\frac{y-x}{t}\right)dS(y) + \fint_{\partial B(x,t)} g(y)dS(y) \\ &\quad + \fint_{\partial B(x,t)} thdS(y)\end{aligned}$$

Kirchhoffsche Formel V

Setzen wir dies in dies in die letzte Gleichung auf Seite 136 ein, so erhalten

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \fint_{\partial B(x,t)} tDg(y)\cdot\left(\frac{y-x}{t}\right)dS(y) + \fint_{\partial B(x,t)} g(y)dS(y) \\ &\quad + \fint_{\partial B(x,t)} thdS(y)\end{aligned}$$

und dies ist gerade – nach Umsortierung – die **Kirchhoffsche Formel**.

Poisson Formel für $n = 2$

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung lautet:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{B(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + tDg(y)\cdot(y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} dy$$

für $x \in \mathbb{R}^2$ und $t > 0$.
Um diese Lösungsdarstellung abzuleiten, betrachtet man das dreidimensionale Anfangswertproblem und nimmt zusätzlich an, dass die Lösung nicht von der dritten Ortskoordinate x_3 abhängt.

Bemerkung

Nach einem zur Herleitung der Kirchhoffschen Formel analogen Prinzip, i.e. Verwendung der EPD Gleichung und geeignete Definition von $\tilde{U}$, lassen sich Lösungsformeln für das Anfangswertproblem der Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$ ableiten.

Teil III

Methoden zur Lösung partieller Differntialgleichunen