Lösungsdarstellung

Weitere **Lösungsdarstellungen** mit Hilfe der Fundamentallösung:

1. Das inhomogene Anfangswertproblem mit homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) f(\mathbf{y},s) d\mathbf{y} ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4(t-s)}} f(\mathbf{y},s) d\mathbf{y} ds \end{aligned}$$

Lösungsdarstellung II

2. **Duhamel'sches Prinzip:**

   Die Funktion $u(\mathbf{x},t;s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) f(\mathbf{y},s) d\mathbf{y}$ löst das Problem

$$\begin{cases} u_t(\cdot\,;s) - \Delta u(\cdot\,;s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ u(\cdot\,;s) = f(\cdot\,;s) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=s\} \end{cases}$$

   Man erhält dann die Lösung der inhomogenen Gleichung durch Integration über s:

$$u(\mathbf{x},t) = \int_0^t u(\mathbf{x},t;s)\, ds$$

3. Das inhomogene Anfangswertproblem mit allgemeinen Anfangsbedingungen $u(\mathbf{x},0) = g(\mathbf{x})$ besitzt die Lösung

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) f(\mathbf{y},s) d\mathbf{y} ds$$

Eigenschaften

Analog zur Laplacegleichung erfüllen auch Lösungen der Wärmeleitungsgleichung **Mittelwertformeln**, die allerdings weniger anschaulich sind:
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ fest. Dann nennt man die Menge

$$U_T = U \times (0, T]$$

den **parabolischen Zylinder** und

$$\Gamma_T = \overline{U_T} \setminus U_T$$

den **parabolischen Rand**.
Für festes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sei die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ gegeben durch

$$E(\mathbf{x}, t; r) = \{(\mathbf{y}, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ s \leq t, \ \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \geq \frac{1}{r^n}\}$$

Heat Ball

Bemerkung

1. *Der Rand von $E(\mathbf{x}, t; r)$ ist gerade eine Höhenlinie der Fundamentallösung $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$.*
2. *Man nennt die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ auch* **Wärmekugel** *(heat ball).*

Mit Hilfe von $E(\mathbf{x}, t; r)$ erhält man folgende **Mittelwerteigenschaft**:

Satz

Ist $u \in \mathcal{C}_1^2(U_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int\limits_{E(\mathbf{x}, t; r)} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t - s)^2} u(\mathbf{y}, s) \, d\mathbf{y} ds$$

für jede Menge $E(x, t; r) \subset U_T$.

Maximumprinizpien

Aus der Mittelwerteigenschaft kann man folgende Maximumprinzipien herleiten.

Satz

Sei $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in U_T. Dann gilt

1. *Das Maximum von $u(\mathbf{x}, t)$ liegt stets auf dem parabolischen Rand, d.h.*
$$\max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{U}_T} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x},t)\in\Gamma_T} u(\mathbf{x}, t)$$
2. *Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ mit*
$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{U}_T} u(\mathbf{x}, t)$$
so folgt, dass u auf $\overline{U}_{t_0}$ konstant ist.

Eindeutigkeit

Satz

Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

auf dem beschränkten Gebiet U mit stetigen Funktionen f und g besitzt maximal eine Lösung $u \in \mathcal{C}_1^2(U_T) \cap \mathcal{C}(\overline{U_T})$.

Beweis

Sind u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen, so lösen die beiden Funktionen $w_{1/2} = \pm(u - \tilde{u})$ die homogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Randbedingungen. Nach dem Maximumprinzip gilt dann, dass $w_{1/2}$ identisch verschwinden, d.h. wir haben $u = \tilde{u}$.

Lösbarkeit des Ganzraumproblems

Satz

Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

auf dem Ganzraum $\mathbb{R}^n$ mit stetigen Funktionen f und g besitzt unter der zusätzlichen Wachstumsbedingung

$$|u(x,t)| \le Ae^{a|x|^2} \qquad (A, a > 0)$$

maximal eine Lösung $u \in \mathcal{C}_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$.

Unendlich viele Lösungen

Beispiel

In der Tat kann man zeigen, dass für das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

unendlich viele Lösungen existieren. Nur die Nulllösung erfüllt die angegebene Wachstumsbedingung; alle anderen Lösungen wachsen rapide an.

Wellengleichung

In diesem Kapitel untersuchen wir die **Wellengleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

sowie die **inhomogene Wellengleichung** der Form

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

in Verbindung mit geeigneten Anfangs– und Randbedingungen. Hier bezeichnet $t > 0$ die Zeitvariable und $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Ortsvariable.

Wir suchen also eine Funktion $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$, wobei der Laplace–Operator auf die Ortsvariable $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ wirkt. Für die inhomogene Gleichung bezeichnet die rechte Seite eine gegebene Funktion $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Direkte Lösungsmethoden

Wir untersuchen zunächst eine **direkte** Methode zur Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

wobei g, h vorgegebene Anfangsbedingungen sind.
Beobachtung:
Die Differentialgleichung läßt auf folgende Weise faktorisieren: es gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0$$

Setzen wir nun

$$v(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t),$$

Transportgleichung

so erhalten wir eine Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$v_t(x,t) + v_x(x,t) = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$v(x,t) = a(x-t)$$

und erfüllt die Anfangsbedingung

$$v(x,0) = a(x).$$

Wegen

$$v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$$

ist $u(x,t)$ demnach die Lösung der **inhomogenen** Transportgleichung

$$u_t - u_x = a(x-t).$$

Lösung der Gleichung

Nach den Methoden aus Kapitel 2 erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t a(x+(t-s)-s)ds + u(x+t,0) \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + u(x+t,0) \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + g(x+t) \end{aligned}$$

Diese Lösung soll nun noch die Anfangsbedingung

$$u_t(x,0) = h(x)$$

erfüllen.

Lösung des Anfangswertproblems

Man berechnet

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\left(a(x+t) + a(x-t)\right) + g'(x+t)$$

und damit

$$u_t(x,0) = a(x) + g'(x) = h(x) \quad \Rightarrow \quad a(x) = h(x) - g'(x).$$

Also folgt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \left(h(y) - g'(y)\right) dy + g(x+t) \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy - \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}g(x-t) + g(x+t) \end{aligned}$$

Formel von d'Alembert

Wir erhalten aus der Beziehung

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy - \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}g(x-t) + g(x+t)$$

demnach

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy.$$

Diese Darstellung nennt man die **Formel von d'Alembert**.

Bemerkung

Damit diese Lösung $u(x,t)$ tatsächlich eine **differenzierbare** *Lösung der Wellengleichung ist, müssen wir bezüglich der Anfangsbedingungen fordern:*

$$g \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h \in C^1(\mathbb{R}).$$