### Definition

1. Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

   nennt man das **Dirichlet–Problem** der Poissongleichung (bzw. der Laplacegleichung, falls $f = 0$).
2. Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

   nennt man das **Neumann–Problem** der Poissongleichung (bzw. der Laplacegleichung, falls $f = 0$).
   Hierbei bezeichnet $n$ die äußere Normale an $\partial U$.





## Lösung von Randwertaufgaben

### Proposition

*Sei $u \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für alle Punkte $\mathbf{x} \in U$ die Beziehung*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} \Big( \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \Big) dS(\mathbf{y}) - \int_U \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

*Die Funktion $\Phi$ bezeichnet dabei wieder die Fundamentallösung der Laplacegleichung.*

### Beweis

*Greensche Formeln aus der Analysis III.* **Anwendung** *auf Randwertprobleme der Laplace– und Poissongleichung:*
*Wir können im Prinzip die Lösung an jedem Punkt berechnen, aber benötigen dazu Randdaten sowohl für $u$ als auch die Ableitung $\partial u / \partial \mathbf{n}$.* □

### Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet–Problems

$$\begin{cases} \Delta\Phi^x &= 0 & \text{in } U \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) & \text{auf } \partial U \end{cases} .$$

Dann ist die **Greensche Funktion** auf $U$ gegeben durch

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y} \in U,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}).$$





## Lösung der Poissongleichung

### Satz

*Sei $u \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$ eine Lösung des Dirichlet–Problems der Poissongleichung. Dann läßt sich u in der Form*

$$u(\mathbf{x}) = -\int\limits_{\partial U} g(\mathbf{y})\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) + \int\limits_U f(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

*darstellen.*

Beweis

*Nach obiger Proposition hatten wir die Lösungsdarstellung*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} \Big(\Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Big)\, dS(\mathbf{y}) - \int_U \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

*Das Problem dabei war, dass uns beim Dirichlet–Problem die Randdaten von* $\partial u/\partial \mathbf{n}$ *nicht bekannt sind.*

*Nach den Greenschen Formeln gilt aber*

$$-\int_U \Phi^x(\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_{\partial U} u(\mathbf{y})\frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - \Phi^x(\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y})$$

*und daher*

$$\int_{\partial U} \Phi^x(\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) = \int_U \Phi^x(\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \int_{\partial U} u(\mathbf{y})\frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}).$$





# Lösungsdarstellung – Beweis II

Beweis

*Aus der Randbedingung* $\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ *folgt*

$$\int_{\partial U} \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})(\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) = \int_U \Phi^x(\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \int_{\partial U} u(\mathbf{y})\frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}).$$

*Wir erhalten damit:*

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \int_{\partial U} \Big(\Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Big)\, dS(\mathbf{y}) - \int_U \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\partial U} u(\mathbf{y})\underbrace{\Big(\frac{\partial \Phi^x(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}\Big)}_{-\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}}}\, dS(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int_U \underbrace{(\Phi^x(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}))}_{-G(\mathbf{x},\mathbf{y})}\Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

## Eigenschaften der Greenschen Funktion

1. Die Greensche Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ harmonisch in $\mathbf{y}$,
2. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ erfüllt homogene Randbedingungen, d.h.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{y} \in \partial U,\ \mathbf{x} \in U,$$

3. die Greensche Funktion ist eindeutig bestimmt,
4. die Greensche Funktion ist symmetrisch, d.h.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

### Beispiel

1. Die Greensche Funktion für den Halbraum

$$\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \ : \ x_n > 0\},$$

2. die Greensche Funktion für die Einheitskugel $B(0, 1)$.





## Greensche Funktion im Halbraum

Allgemein ist die Greensche Funktion gegeben durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}).$$

Dabei ist $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ die Fundamentallösung und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung von

$$\begin{cases} \Delta\Phi^x &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \ : \ x_n = 0\} \end{cases}.$$

Für einen Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ definieren wir die Reflektion an der Ebene $\partial\mathbb{R}^n_+$ mittels

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n).$$

Betrachtet man nun die Funktion

$$\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n_+).$$

Dann ist $\Phi^x(\mathbf{y})$ harmonisch auf dem **ganzem** Halbraum $\mathbb{R}^n_+$ und auf dem Rand gilt:

$$\begin{aligned}\Phi^x(\mathbf{y}) &= \Phi(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1-x_1,\ldots,y_{n-1}-x_{n-1},x_n)\\ &= \Phi(y_1-x_1,\ldots,y_{n-1}-x_{n-1},-x_n) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}),\end{aligned}$$

da die Fundamentallösung nur von $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|$ abhängt.
Also löst die Funktion $\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta\Phi^x = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ \Phi^x = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) & \text{auf } \{\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)^T : y_n = 0\} \end{cases}$$

und die Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$ lautet

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n_+,\ \mathbf{x}\neq\mathbf{y}).$$





# Greensche Funktion

Man berechnet nun

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{\partial\Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \frac{\partial\Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})\\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)}\left[\frac{y_n-x_n}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^n} - \frac{y_n+x_n}{|\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}|^n}\right]\end{aligned}$$

und damit gilt für $\mathbf{y}\in\partial\mathbb{R}^n_+$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{-2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|x-y|^n}.$$

# Poissonkern

## Definition

Die Funktion

$$K(x,y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+, \, \mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+)$$

nennt man auch den **Poissonkern** von $\mathbb{R}^n_+$.





# Dirichletproblem

## Satz (Dirichlet–Problem für die Laplacegleichung)

*Die Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ u &= g \quad \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \,:\, x_n = 0\} \end{cases}$$

*ist gegeben durch die Poissonsche Integralformel*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}.$$

*Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen*

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x},\mathbf{y})dy = 1$$

**beschränkt**, *falls $g$ beschränkt ist. Man kann weiter zeigen, dass die Lösung sogar* **unendlich oft differenzierbar** *ist.*

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, bezeichnet der Punkt

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$$

den **dualen Punkt** von **x** bezüglich $\partial B(0,1)$.
Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

$$\begin{cases} \Delta\Phi^x &= 0 & \text{in } B^0(0,1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \quad |\mathbf{x}| < 1\} \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) & \text{auf } \partial B(0,1) \end{cases}$$

gegeben durch

$$\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}))$$

und wir erhalten folgende Greensche Funktion für die Einheitskugel:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})) \quad (\mathbf{x},\mathbf{y} \in B(0,1), \mathbf{x} \neq \mathbf{y}).$$





# Dirichletproblem auf der Kugel

## Satz (Dirichlet–Problem für die Laplacegleichung)

*Die Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 & \textit{in } \{\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)^T : |\mathbf{x}| < 1\} \\ u &= g & \textit{auf } \{\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)^T : |\mathbf{x}| = 1\} \end{cases}$$

*ist gegeben durch die Poissonsche Integralformel*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1-|\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \int\limits_{|\mathbf{x}|=1} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n} dS(\mathbf{y}).$$

*Der* **Poissonkern** *für die Einheitskugel lautet demnach*

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1-|\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n} \quad (|\mathbf{x}| < 1, |\mathbf{y}| = 1).$$

### Bemerkung

*Mit Hilfe der Transformation $\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(r\mathbf{x})$ kann man leicht eine Darstellung für die Kugel $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < r\}$ ableiten.*





## Explizite Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Wir suchen explizite Lösungen der **Wärmeleitungsgleichung**

$$u_t = \Delta_x u.$$

Hier ist $t \geq 0$ die **Zeitvariable** und $\mathbf{x} \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, die **Ortsvariable**.

**Anfangswertproblem:** (Cauchy–Problem)

Sei $U = \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t & = & \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u & = & g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} .$$

**Anfangs–Randwertproblem:**

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt:

$$\begin{cases} u_t & = & \Delta u & \text{in } U_T = U \times (0, T] \\ u & = & g & \text{auf } \Gamma_T = \overline{U_T} \setminus U_T \end{cases} .$$

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs–Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) = u_0(x) & : \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = a(t),\ u(\pi,t) = b(t) & : \quad 0 \le t \le T \end{cases}$$

Wir suchen eine Lösung mittels des **Produktansatzes**:

$$u(x,t) = p(x) \cdot q(t).$$

**Einsetzen** in die Wärmeleitungsgleichung ergibt

$$p(x)\dot{q}(t) = q(t)p''(x)$$

und damit die Beziehung

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \qquad (p(x) \neq 0,\ q(t) \neq 0).$$





# Produktansatz II

In der Gleichung

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \qquad (p(x) \neq 0,\ q(t) \neq 0)$$

steht

1. auf der **linken** Seite ein Term, der nur von $t$ abhängt,
2. auf der **rechten** Seite ein Term, der nur von $x$ abhängt.

Daraus folgt

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} = \text{const} =: -\delta.$$

Wir erhalten also die beiden **gewöhnlichen** Differentialgleichungen

$$\dot{q}(t) + \delta\, q(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad p''(x) + \delta\, p(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{q}(t) + \delta\, q(t) = 0$ ist gegeben durch

$$q(t) = c_0\, e^{-\delta t}.$$

Die Lösung der Gleichung $p''(x) + \delta\, p(x) = 0$ hängt entscheidend von der Konstanten $\delta$ ab:

1. Für $\delta = 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 x + c_2$$

2. Für $\delta < 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 e^{-\sqrt{|\delta|}x} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|}x}$$

3. Für $\delta > 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)$$





# Produktansatz IV

**Ohne** Berücksichtigung der vorgegebenen Anfangs– und Randbedingungen erhalten wir über den Produktansatz folgende Lösungsklassen:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 x + c_2) \\ u(x,t) &= c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 e^{-\sqrt{|\delta|}x} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|}x}) \\ u(x,t) &= c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)). \end{aligned}$$

Die vorgegebenen Anfangs– und Randbedingungen lauten

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u(0,t) = a(t), \qquad u(\pi,t) = b(t).$$

**Fazit:**
Die Parametermenge $\{c_0, c_1, c_2, \delta\}$ kann i.A. nicht gegebene Funktionen $u_0(x), a(t)$ und $b(t)$ beschreiben.
Der Produktansatz liefert nur bei speziellen Anfangs– und Randbedingungen eine explizite Lösung.

### Beispiel

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs–Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \ 0 < x < \pi,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) = \sin x & : \ 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0 & : \ 0 \leq t \leq T \end{cases}.$$

Aufgrund der vorgegebenen Randbedingungen fallen grundsätzlich die ersten beiden Lösungsklassen aus. Es bleibt also

$$u(x,t) = c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)).$$

Wegen der Vorgabe $u(x,0) = \sin x$ erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = e^{-t} \sin x.$$





## Superpositionsprinzip

Jede Lösung der Form

$$u(x,t) = b_k e^{-k^2 t} \sin(kx) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

erfüllt die homogenen Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.
Eine Überlagerung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

ergibt die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

Für eine gegebene Anfangsbedingung $u_0(x)$ ist die rechte Seite eine Entwicklung in eine **Fourier–Reihe**, d.h.

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

### Definition

Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Insbesondere ist die Fundamentallösung **normiert**, d.h. für alle $t > 0$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1$$

### Bemerkung

*Die Fundamentallösung besitzt für* $t = 0$ *und* $\mathbf{x} = 0$ *eine Singularität.*





## Cauchy – Problem

Mit Hilfe von $\Phi(x, t)$ lässt sich für das **Cauchy–Problem**

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung wieder in der Form eines Faltungsintegral angeben:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

**Herleitung** der Fundamentallösung (nur für $x \in \mathbb{R}$):
Ist $u(x, t)$ eine Lösung von $u_t = \Delta u$, so ist $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

**Ansatz:**
Wir suchen daher eine spezielle Lösung in der Form

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{1/2}} v\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right).$$

Man berechnet nun

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= -\frac{1}{2}t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot t^{-1/2} v' \\ u_x(x,t) &= t^{-1/2} \cdot t^{-1/2} \cdot v' \\ u_{xx}(x,t) &= t^{-3/2} \cdot v''. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = -\frac{1}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-2} \cdot v' - t^{-3/2} \cdot v'' = 0.$$





## Spezielle Lösung II

Wir erhalten also mit $r = x/\sqrt{t}$ die Gleichung zweiter Ordnung

$$\frac{1}{2}v + \frac{r}{2}v' + v'' = 0.$$

Umschreiben ergibt

$$(v')' + \frac{1}{2}(rv)' = 0 \quad \Rightarrow \quad v' + \frac{1}{2}rv = c \in \mathbb{R}.$$

Nehmen wir nun folgende Grenzbeziehungen an

$$\lim_{r\to\infty} v(r) = \lim_{r\to\infty} v'(r) = 0$$

so folgt $c = 0$ und die Gleichung lautet

$$v' = -\frac{1}{2}rv \quad \Rightarrow \quad v(r) = be^{-r^2/4}.$$

Eine explizite Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist damit

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$