Existenz und stetige Abhängigkeit

Beispiel (Fortsetzung)

Die eindeutig bestimmte Lösung ist (**Formel von d'Alembert**):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)\, d\xi.$$

Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten:

Sei $\tilde{u}(x,t)$ die Lösung zu den Anfangsdaten $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,t) - u(x,t) &= \frac{1}{2}\Big(\tilde{u}_0(x-ct) - u_0(x-ct)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\tilde{u}_0(x+ct) - u_0(x+ \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \Big(\tilde{v}_0(\xi) - v_0(\xi)\Big)\, d\xi. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber

Anfangswertaufgabe für die Laplacegleichung

Beispiel (Hadamard)

Das Anfangswertproblem für die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0,\infty) \\ u = u_0,\, u_y = v_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \end{cases}$$

ist ein **nicht korrekt gestelltes** elliptisches Problem. Setzen wir $u_0(x) = v_0(x) = 0$, so ist die eindeutig bestimmte Lösung gegeben durch

$$u(x,y) = 0.$$

Lauten die Anfangsdaten dagegen

$$u_0^n(x) = 0, \quad v_o^n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}$$

Keine stetige Abhängigkeit

Beispiel (Fortsetzung)

so ist die eindeutig bestimme Lösung zu den Anfangsdaten (u_0^n, v_0^n)

$$u^n(x,y) = \frac{1}{n^2}\sin(nx)\sinh(ny).$$

Nun gilt

$$\lim_{n\to\infty} u_0^n = u_0 \qquad \lim_{n\to\infty} v_0^n = v_0.$$

Vergleicht man aber beide Lösungen, so ergibt sich wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sinh(ny) = \infty \qquad (y > 0)$$

das Grenzverhalten

$$\lim_{n\to\infty} u^n(x,y) \neq u(x,y)$$

d.h. die Lösung hängt nicht stetig von den Anfangsdaten ab.

Randwertaufgabe für die Laplacegleichung

Beispiel

Das Randwertproblem für die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\} \\ u = g & \text{auf } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\} \end{cases}$$

ist ein **korrekt gestelltes** elliptisches Problem.
Die eindeutig bestimmte Lösung ist durch die

Poissonsche Integralformel

gegeben:

$$u(x,y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{2\pi} \int\limits_{x^2+y^2=1} \frac{g(\mathbf{z})}{\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|^2}\, d\sigma$$

Laplacegleichung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Laplacegleichung

$$\Delta u = 0, \qquad u = u(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

und der zugehörigen Poissongleichung

$$-\Delta u = f$$

mit vorgegebener rechten Seite $f = f(\mathbf{x})$.

Definition

Eine $\mathcal{C}^2$–Funktion $u = u(\mathbf{x})$, die die Laplacegleichung erfüllt, d.h. für die gilt

$$\Delta u = 0,$$

nennt man eine **harmonische Funktion**.

Fundamentallösung

Wir versuchen zunächst, eine explizite Lösung der Laplacegleichung zu berechnen, mit Hilfe der wir weitere Lösungsdarstellungen ableiten können.
Beobachtung:
Der Laplaceoperator Δ ist invariant gegenüber Rotationen in $\mathbb{R}^n$
Lösungsansatz:

$$u(\mathbf{x}) = v(r), \quad r = \|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

Man rechnet leicht nach:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-1/2}\, 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0)$$

und damit gilt für $i = 1, \ldots, n$:

$$u_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r)\,\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right).$$

Fundamentallösung II

Wir erhalten also

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r)$$

und mit $\Delta u = 0$ ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0.$$

Setzen wir $w = v' \neq 0$, so löst w die lineare Differentialgleichung

$$w' = -\frac{n-1}{r} w.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch

$$w(r) = \frac{\alpha}{r^{n-1}}$$

mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $v(r)$ gilt demnach

$$v' = \frac{\alpha}{r^{n-1}}.$$

Fundamentallösung III

Die Gleichung für v können wir integrieren und bekommen damit eine Lösung in der Form

$$v(r) = \begin{cases} -b \log r + c & (n = 2) \\ \dfrac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3) \end{cases}$$

mit den beiden Konstanten b und c.

Definition

Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log \|x\| & (n = 2) \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|x\|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

definiert für $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, nennt man die **Fundamentallösung der Laplacegleichung**. Die Konstante $\alpha(n)$ bezeichnet dabei das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.

Lösung der Poissongleichung

Bemerkung

Die Fundamentallösung ist für alle $\mathbf{x} \neq 0$ *eine harmonische Funktion.*

Beispiel

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\operatorname{vol}(K_1(0)) = \alpha(3) = 4\pi/3$ und damit ist die Fundamentallösung gegeben durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Satz (Darstellung der Lösung der Poissongleichung)

Die Lösung der Poissongleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

Mittelwerteigenschaft

Eine besondere Eigenschaft harmonischer Funktionen ist, dass der Funktionswert an einer Stelle $\mathbf{x}$ stets gleich dem Mittelwert von u über eine Kugel mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ bzw. der zugehörigen Sphäre um $\mathbf{x}$ ist.

Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ *eine offene Menge. Ist* $u \in C^2(U)$ *harmonisch, dann gilt*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u\, dS = \int_{B(\mathbf{x},r)} u\, d\mathbf{y}$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$.

Notation:

Bei Mittelungen über die Kugel oder die Sphäre schreiben wir

$$\int \cdots = \frac{1}{\operatorname{vol}(B(\mathbf{x}, r))} \int \cdots.$$

Beweis der Mittelwerteigenschaft

Beweis

Wir definieren die Funktion $\phi(r)$ durch

$$\phi(r) = \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) = \int_{\partial B(0,1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z})\, dS(\mathbf{z}).$$

Dann gilt

$$\phi'(r) = \int_{\partial B(0,1)} Du(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}\, dS(\mathbf{z})$$

und mit Hilfe der Greenschen Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} Du(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{r}\, dS(\mathbf{y}) \\
&= \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS(\mathbf{y}) \\
&= \frac{r}{\ } \int \Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}
\end{aligned}$$

Beweis der Mittelwerteigenschaft II

Beweis

Damit ist ϕ konstant und es gilt

$$\phi(r) = \lim_{t\to 0} \phi(t) = \lim_{t\to 0} \int_{\partial B(\mathbf{x},t)} u(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x}).$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B(\mathbf{x},r)} u\, d\mathbf{y} &= \int\limits_0^r \left(\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},s)} u dS \right) ds \\
&= u(\mathbf{x}) \int\limits_0^r n\alpha(n) s^{n-1} ds = \alpha(n) r^n u(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich gerade die Mittelwertformel

Mittelwerteigenschaft und harmonische Funktionen

Es gilt auch folgende Umkehrung

Satz

Für die Funktion $u \in C^2(U)$ gelte

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} u dS$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$, dann ist u harmonisch.

Beweis

Ist $\Delta u \neq 0$, so existiert eine Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$, sodass $\Delta u > 0$ innerhalb von $B(\mathbf{x}, r)$ gilt. Wir wissen aber, dass

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} > 0$$

was zu einem Widerspruch führt. Also ist u harmonisch. □

Maximumprinzip

Satz

Sei $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ harmonisch in U. Dann gilt:

1. **Maximumprinzip**

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{U}} u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}\in\partial U} u(\mathbf{x})$$

2. **Starkes Maximumprinzip**
   Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in U$ mit

$$u(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x}\in\overline{U}} u(\mathbf{x})$$

   so folgt, dass u auf U konstant ist.

Beweis

Verwende auf geeignete Weise die **Mittelwerteigenschaft** *harmonischer Funktionen.*

Eindeutige Lösung der Randwertaufgabe

Satz

Sei $g \in C(\partial U)$, $f \in C(U)$. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } U \\ u &= g \quad \text{auf } \partial U \end{cases}.$$

Beweis

Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen. Dann löst $w = \pm(u_1 - u_2)$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } U \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial U \end{cases}.$$

Aus dem Maximumprinzip folgt dann

$$w = \pm(u_1 - u_2) = 0$$

identisch auf U und daher gilt $u_1 = u_2$

Eigenschaften harmonischer Funktionen

1. Erfüllt eine stetige Funktion $u \in C(U)$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ die **Mittelwerteigenschaft**, so ist u unendlich oft differenzierbar, d.h. $u \in C^\infty(U)$.
2. **Satz von Liouville**
   Die Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei harmonisch und beschränkt. Dann folgt bereits, dass u auf ganz $\mathbb{R}^n$ konstant ist.
3. **Beschränkte** Lösungen der Poissongleichung:
   Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Dann hat jede beschränkte Lösung der Poissongleichung $-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$ die Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + C$$

   mit einer Konstanten C.