Verdünnungswelle

Satz

Für $u_l < u_r$ ist die **Verdünnungswelle** *gegeben durch*

$$u(x,t) := \begin{cases} u_l & : \quad x < f'(u_l)t \\ g(x/t) & : \quad f'(u_l)t < x < f'(u_r)t \\ u_r & : \quad x > f'(u_r)t \end{cases}$$

eine Integrallösung des Riemannproblems. Insbesondere ist die Verdünnungswelle eine **stetige** *Funktion.*

Beweis

Stetigkeit der Verdünnungswelle: Die kritischen Punkte liegen bei

$$x = f'(u_l)\,t \quad \text{und} \quad x = f'(u_r)\,t$$

Hier gilt

$$g\left(\frac{f'(u_l)\,t}{t}\right) = g(f'(u_l)) = (f')^{-1}(f'(u_l)) = u_l.$$

Stetigkeit der Verdünnungswelle

sowie

$$g\left(\frac{f'(u_r)\,t}{t}\right) = g(f'(u_r)) = (f')^{-1}(f'(u_r)) = u_r.$$

Weiter ist die Verdünnungswelle konstant für $x < f'(u_l)\,t$ und $x > f'(u_r)\,t$ und löst daher die vorgegebene Erhaltungsgleichung.
Für $f'(u_l)t < x < f'(u_r)t$ berechnet man

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{x}{t^2} g'(x/t) \\ f(u)_x &= f(g(x/t))_x = f'(g(x/t))\frac{g'(x/t)}{t} = \frac{x}{t^2} g'(x/t) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $g(x/t)$ ebenfalls die Gleichung $u_t + f(u)_x = 0$ löst.
Mit der Stetigkeit folgt daraus, dass die Verdünnungswelle tatsächlich eine Integrallösung ist.

Nichteindeutigkeit der Integrallösung

Problem: Integrallösungen sind nicht **eindeutig**!

Beispiel

Wir betrachten wieder die Burgers Gleichung mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 0 \\ 1 & : \quad x > 0 \end{cases} .$$

Dann erhalten wir zum Beispiel die beiden Integrallösungen

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq t/2 \\ 1 & : \quad x > t/2 \end{cases} \qquad u_2(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ x/t & : \quad 0 \leq x \leq t \\ 1 & : \quad x > t \end{cases} .$$

Die erste Lösung repräsentiert eine Stoßwelle, die zweite eine Verdünnungswelle.

Physikalische Selektion

Welche der beiden ist die physikalisch richtige Lösung?
Man benötigt eine Zusatzbedingung, die die physikalisch richtige Integrallösung aussucht.

Definition

Eine Integrallösung heißt **Entropielösung**, falls die Lösung die folgende **Entropiebedingung** (Lax–Oleinik–Bedingung) erfüllt:

$$\exists \quad C > 0, \text{ sodass für alle } x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ z > 0 \text{ gilt}$$

$$u(t, x+z) - u(t,x) < \frac{C}{t} z.$$

Satz

Erfüllt eine Integrallösung die oben angegebene Entropiebedingung, so ist diese Lösung eindeutig, d.h. Entropielösungen sind eindeutige Lösungen.

Lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

Definition

Eine lineare PDE 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g.$$

Dabei sind die Terme a_{ij}, b_i, f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$.
Den ersten Term nennt man den **Hauptteil** der PDE. Weiter gelte oBdA

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Spezialfall:
Gilt $a_{ij} = \text{const.}$, $i, j = 1, \ldots, n$, so läßt sich die PDE auch in folgender Matrixschreibweise darstellen:

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^t\, \nabla)u + fu = g$$

mit der symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.

Symmetrische Matrizen

Gegeben sei die Differentialgleichung (in Matrixschreibweise)

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^t\, \nabla)u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.
Lineare Algebra: Hauptachsentransformation
Jede reelle, symmetrische Matrix **A** ist **diagonalisierbar**. Weiter gilt

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}$$

wobei **S** als eine **orthogonale** Matrix gewählt werden kann.

Bemerkung

Eine reelle Matrix **S** *heißt* **orthogonal**, *falls gilt:*

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T.$$

Ansatz zur Herleitung von Normalformen

Verwende die Koordinatentransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{y} = \mathbf{S}^T \mathbf{x}$$

und setze

$$\tilde{u}(\mathbf{y}) := u(\mathbf{S}\,\mathbf{y}).$$

Mit $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{S}^T \mathbf{x})$ folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

Wegen $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} = s_{ij}$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}.$$

Koordinatentransformation

Die letzte Beziehung bedeutet aber gerade:

$$\nabla_x\, u(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\, \nabla_y \tilde{u}(\mathbf{S}^T \mathbf{x})$$

oder in formaler Schreibweise

$$\nabla_x = \mathbf{S}\, \nabla_y.$$

Transponieren wir diese Beziehung, so folgt

$$\nabla_x^T = (\mathbf{S}\, \nabla_y)^T = \nabla_y^T\, S^T$$

Ergebnis:
Löst u die Gleichung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^t\, \nabla) u + f u = g$$

so erhalten wir für $\tilde{u}$ die PDE

$$(\nabla^T \mathbf{S}^T \mathbf{A}\mathbf{S}\, \nabla)\tilde{u} + (\mathbf{b}^t \mathbf{S}\, \nabla)\tilde{u} + \tilde{f}\,\tilde{u} = \tilde{g}.$$

Diagonalform

Definition

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^t \nabla) u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.
Dann ist die zugehörige Diagonalform der PDE gegeben durch

$$(\nabla^T \mathbf{D} \nabla)\tilde{u} + ((\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{b}})^T \nabla)\tilde{u} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

mit der Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S}, \qquad \mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}.$$

Dabei ist $\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{y}) := \mathbf{b}(\mathbf{S}\,\mathbf{y})$ und

$$\tilde{f}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{S}\,\mathbf{y}) \qquad \tilde{g}(\mathbf{y}) := g(\mathbf{S}\,\mathbf{y}).$$

Diagonalform im Beispiel

Beispiel

Wir betrachten den Fall von zwei unabhängigen Variablen:

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + & \\ b_1(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1,x_2)u &= g(x_1,x_2). \end{aligned}$$

Mit $\tilde{\mathbf{p}} := \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{b}}$ lautet die Diagonalform

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{p}_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

Beachte: Die Transformation auf Diagonalform ist keineswegs **eindeutig**, allerdings sind die beiden Koeffizienten des **Hauptterms** gerade die **Eigenwerte** der Ausgangsmatrix **A**.

Klassifikation der PDE 2. Ordnung

Definition

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^t \nabla)u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

1) Sind sämtliche Eigenwerte von **A** von Null verschieden und besitzen sie einheitliche Vorzeichen, so nennt man die Gleichung **elliptisch**.
2) Sind sämtliche Eigenwerte von **A** von Null verschieden, wobei ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n-1$ Eigenwerte besitzt, so nennt man die Gleichung **hyperbolisch**.
3) Ist mindestens ein Eigenwert von **A** gleich Null, so nennt man die Gleichung **parabolisch**.

Klassifikation in zwei Variablen

Beispiel

Wir betrachten wiederum den Fall von zwei unabhängigen Variablen:

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \\ b_1(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1,x_2)u &= g(x_1,x_2). \end{aligned}$$

Dann ist die **Diagonalform** gegeben durch:

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{p}_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

Die partielle Differentialgleichung heißt

1) **elliptisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ ist.
2) **hyperbolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ ist.
3) **parabolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ ist.

Nichtkonstante Koeffizienten

Bemerkung

Die Typeneinteilung läßt sich auf Fälle mit **nichtkonstanter** *Koeffizientenmatrix* **A** *erweitern: die Gleichung*

$$yu_{xx} - u_{xy} - u_{yx} + xu_{yy} = 0$$

hat die Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}.$$

Die Diskriminante D lautet daher

$$D = 1 - xy.$$

Die Gleichung ist also **parabolisch** *auf der Hyperbel $xy = 1$,* **elliptisch** *in den beiden konvexen Bereichen $xy > 1$ und* **hyperbolisch** *im zusammenhängenden Bereich $xy < 1$.*

Typeneinteilung – Warum?

Beispiel

Die Tricomi–Gleichung

$$k(y)u_{xx} - u_{yy} = g(x, y)$$

ist **elliptisch** für $k(y) < 0$, **hyperbolisch** für $k(y) > 0$ und **parabolisch** für $k(y) = 0$.

Zentrale Frage:

Wieso macht man eine solche Typeneinteilung?

Zentrale Antwort:

Jede Typenklasse hat charakteristisches Lösungsverhalten!

Normalformen partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung

Definition

1) Die Normalform einer **elliptischen** Differentialgleichung in n Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ ist

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g$$

2) Die Normalform einer **hyperbolischen** Differentialgleichung in $(n+1)$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)^T$ ist

$$u_{tt} - \Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g$$

Hierbei bezeichnet Δ den Laplace–Operator bezüglich $\mathbf{x}$.

Normalformen partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung II

Definition (Fortsetzung)

3) Die Normalform einer **parabolischen** Differentialgleichung in $(n+1)$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)^T$ ist

$$\Delta u + b_0 u_t + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_{x_i} + fu = g$$

wobei Δ wiederum den Laplace–Operator bezüglich $\mathbf{x}$ bezeichnet.

Klassische Beispiele:

1) **Elliptische** Laplacegleichung

$$\Delta u = 0,$$

2) **Hyperbolische** Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

Korrekt gestellte Probleme

Definition

Ein **korrekt gestelltes Problem** besteht aus einer in einem Gebiet definierten partiellen Differentialgleichung zusammen mit einer gewissen Menge von Anfangs– und/oder Randbedingungen, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1) **Existenz:**
   Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt.
2) **Eindeutigkeit:**
   Die Lösung ist eindeutig.
3) **Stabilität:**
   Die Lösung hängt stetig von den Anfangs– bzw. Randbedingungen ab, d.h. geringfügige Änderungen in den Daten ergeben geringfügige Änderungen in der Lösung.

Eindimensionale Wellengleichung

Beispiel

Das Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = u_0, u_t = v_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

ist ein **korrekt gestelltes** hyperbolisches Problem.

Physikalische Motivation:

Die Wellengleichung beschreibt das dynamische Verhalten einer eingespannten Saite, die zur Zeit $t = 0$

1) um die Funktion $u_0(x)$ ausgelenkt ist und
2) sich mit der Geschwindigkeit $v_0(x)$ bewegt.