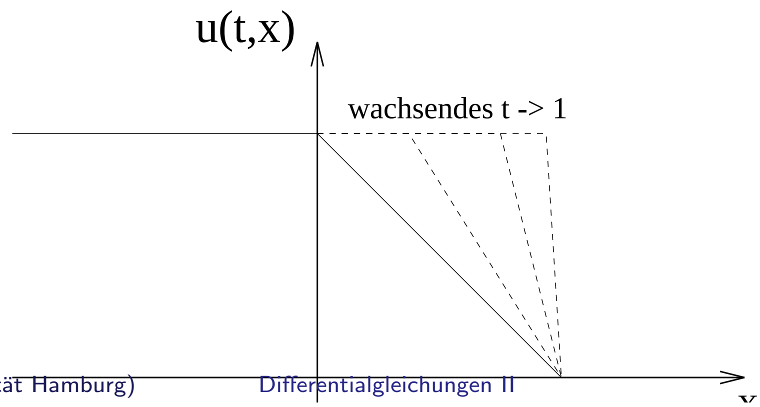
Singularitäten der Lösung

Zur Zeit $t = 1$ laufen unendlich viele Kurven durch den Punkt $x = 1$, d.h. im Punkt $(x, t) = (1, 1)$ ist die Lösung nicht mehr eindeutig. In der Tat existiert die (klassische) Lösung der Burgers Gleichung mit der angegebenen Anfangsbedingung nur **lokal** in der Zeit für $0 \le t < 1$. Für $t \in [0, 1)$ ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & : \quad x < t \\ (1-x)/(1-t) & : \quad 0 \le t \le x < 1 \\ 0 & : \quad x > 1 \end{cases} .$$

Das zugehörige Bild der Lösung für verschiedene $t \in [0, 1)$:



Das Cauchy Problem

Das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

hat im Allgemeinen keine globale Lösung.

Burgers Gleichung aus dem letzten Abschnitt mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \le 0 \\ 1 - x & : \quad 0 < x < 1 \\ 0 & : \quad x \ge 1 \end{cases}$$

besitzt nur auf dem Zeitintervall $[0, t)$ die Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & : \quad x < t \\ (1-x)/(1-t) & : \quad 0 \le t \le x < 1 \\ 0 & : \quad x > 1 \end{cases} .$$

Funktionen mit kompaktem Träger

Definition

(a) Der **Träger einer Funktion** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\overline{\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f(\mathbf{x}) \neq 0 \right\}}.$$

(b) Ist der Träger einer Funktion kompakt, so sprechen wir von einer **Funktion mit kompakten Träger**.

Bemerkung

Es gibt (viele) differenzierbare, ja sogar unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompakten Träger. Diese spielen in der modernen Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen eine entscheidende Rolle.

Was passiert für $t \geq 1$?

Sei $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Multiplizieren wir $u_t + f(u)_x = 0$ mit v und integrieren über $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f(u)_x)\, v dx dt \\ &= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t dx dt - \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0) dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) v_x dx dt. \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$ ergibt sich

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + f(u) v_x)\, dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0) dx = 0.$$

Testfunktionen und schwache Lösungen

Definition

Eine differenzierbare Funktion $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger nennt man auch eine **Testfunktion**.

Definition

Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ nennt man eine **Integrallösung** oder **schwache Lösung**, falls die Beziehung

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x)\, dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x,0)dx = 0$$

für alle Testfunktionen v erfüllt ist.

Bemerkung

Eine Integrallösung muß **keine** *differenzierbare Funktion sein, sondern kann sogar* **Sprungstellen** *besitzen.*

Das Riemann Problem

Definition

Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \le 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

nennt man ein **Riemannproblem** für skalare Erhaltungsgleichungen.

Riemann Problem für die Burgers Gleichung

Beispiel

Ein Riemannproblem für die Burgers Gleichung lautet

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases} .$$

Integrallösungen für die Burgers Gleichung

Was sind in diesem Fall die Integrallösungen?

1) **Stoßwellenlösung** bei der Burgers Gleichung:
   Für $u_l \neq u_r$ lautet die Integrallösung

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq s(t) \\ u_r & : \quad x > s(t) \end{cases}$$

   Dabei bezeichnet die Funktion $s(t)$ die Lage der **Stoßfront**, d.h. der Unstetigkeitsstelle oder Sprungstelle.
   Die Stoßfront bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\dot{s}(t)$ wobei

$$\dot{s}(t) = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$$

   und $s(0) = 0$ ist.
   Diese Beziehung nennt man die **Rankine–Hugoniot Bedingung**.

Integrallösungen für die Burgers Gleichung II

2) **Verdünnungswelle** bei der Burgers Gleichung
Für $u_l > u_r$ lautet **eine** Integrallösung

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x \le u_l\, t \\ \dfrac{x}{t} & : \quad u_l\, t \le x \le u_r\, t \\ u_r & : \quad x \ge u_r\, t \end{cases}$$

Man beachte, dass die Lösung $u(x,t)$ eine **stetige** Funktion ist. Die Lösung ist an den beiden Punkten $x = u_l\, t$ und $x = u_r\, t$ aber **nicht** differenzierbar und daher nur eine Integrallösung.

Bemerkung

Für $u_l > u_r$ stellt sich die Frage welche der Lösungen (Stoßwelle oder Verdünnungswelle) physikalisch von Bedeutung ist. Es wird sich zeigen, dass nur die Verdünnungswelle relevant ist.

Stoßwellen

Definition (Stoßwellenlösung)

Eine Stoßwellenlösung u ist eine Integrallösung der Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

wenn eine sogenannte Stoßfront $x = s(t)$, $s \in C^1$ existiert, sodass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PDE ist und u bei $x = s(t)$ eine Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(t, s(t)^+) - u(t, s(t)^-)$$

besitzt. Die Größe $\dot{s}(t)$ nennt man die Stoßgeschwindigkeit.

Rankine-Hugoniot-Bedingung

Satz

Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s}$ die **Rankine–Hugoniot Bedingung**

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-, t)) - f(u(s(t)^+, t)}{u(s(t)^-, t) - u(s(t)^+, t)}.$$

Beweis

Eine Integrallösung erfüllt die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(\xi, t) d\xi = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t)).$$

Herleitung der Rankine–Hugoniot Bedingung

Beweis (Fortsetzung)

Wählen wir $x_1 < s(t) < x_2$ so folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{s(t)} u(\xi, t) d\xi + \int_{s(t)}^{x_2} u(\xi, t) d\xi \right) = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t)).$$

Da $u(x, t)$ für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ nach Definition eine differenzierbare Lösung ist, können wir unter den beiden Integralen ableiten:

$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\xi + \dot{s}\, u(s(t)^-, t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\xi - \dot{s}\, u(s(t)^+, t) + f_2 - f_1 = 0.$$

Herleitung der Rankine–Hugoniot Bedingung

Beweis (Fortsetzung)

$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\xi + \dot{s}\, u(s(t)^-, t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\xi - \dot{s}\, u(s(t)^+, t) + f_2 - f_1 = 0$$

mit

$$f_1 = f(u(x_1, t)), \qquad f_2 = f(u(x_2, t))$$

Im Grenzfall $x_1 \to s(t)^-$ und $x_2 \to s(t)^+$ verschwinden die Integrale und wir erhalten

$$\dot{s}\, u(s(t)^-, t) - \dot{s}\, u(s(t)^+, t) = f(u(s(t)^-)) - f(u(s(t)^+)).$$

Dies ist aber gerade die Rankine–Hugoniot Bedingung in der Form

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]}.$$

□

Stoßwellen für die Burgers Gleichung

Beispiel

Wir betrachten die Burgers Gleichung mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

und $u_l > u_r$. Die Rankine–Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{u_l^2/2 - u_r^2/2}{u_l - u_r} = \frac{(u_l - u_r)(u_l + u_r)}{2(u_l - u_r)} = \frac{1}{2}(u_l + u_r).$$

Damit lautet die Stoßwellenlösung dieses Problems

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq \frac{1}{2}(u_l + u_r)\, t \\ & \\ u_r & : \quad x > \frac{1}{2}(u_l + u_r)\, t \end{cases}.$$

Verdünnungswelle

Wir betrachten das Riemannproblem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \le 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

wobei nun gilt: $u_l < u_r$.
Zusätzlich nehmen wir an, dass $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und $f'' > 0$ gilt, d.h. die Flussfunktion ist **strikt konvex**.
Schließlich setzen wir noch

$$g := (f')^{-1}.$$

Verdünnungswelle II

Nach Annahme ist die Flussfunktion f strikt konvex, d.h. f' ist streng monoton wachsend. Also gilt:

$$u_l < u_r \quad \Rightarrow \quad f'(u_l) < f'(u_r).$$

Es gibt daher **genau zwei** Typen von Charakteristiken, nämlich

$$x(t) = x_0 + f'(u_l)\,t \quad \text{und} \quad x(t) = x_0 + f'(u_r)\,t.$$

Diese beiden Kurvenscharen füllen **nicht** die ganzen Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ aus! Es entsteht ein Bereich Ω, der nicht durchlaufen wird:

$$\Omega := \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \;:\; f'(u_l)\,t < x < f'(u_r)\}.$$

In Ω liefert die Methode der Charakteristiken keine Werte und wir können im Prinzip die Lösung auf Ω mit einer beliebigen Funktion definieren.