Charakteristikenmethode im Beispiel

Beispiel

Wir betrachten die PDE in drei Variablen

$$xu_x + yu_y + (x^2 + y^2)u_z = 0.$$

Das charakteristische System lautet dann

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= y \\ \dot{z} &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

und besitzt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t \\ y(t) &= c_2 e^t \\ z(t) &= \frac{1}{2}\left(c_1^2 + c_2^2\right)e^{2t} + c_3. \end{aligned}$$

Man nennt diese Lösungen die charakteristischen Kurven.

Charakteristikenmethode im Beispiel II

Beispiel (Fortsetzung)

Für die Lösung der Ausgangsgleichung gilt damit

$$u(x(t), y(t), z(t)) = u\left(c_1 e^t, c_2 e^t, \frac{1}{2}\left(c_1^2 + c_2^2\right)e^{2t} + c_3\right) = \text{const.}$$

Die charakteristischen Kurven erfüllen aber die Beziehungen:

$$e^t = x(t)/c_1 = y(t)/c_2 \quad \Rightarrow \quad y(t)/x(t) = c_2/c_1 = c \in \mathbb{R}$$

und

$$z(t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c_3 \quad \Rightarrow \quad z(t) - \frac{1}{2}(x(t)^2 + y(t)^2) = d \in \mathbb{R}$$

d.h. allein die beiden Konstanten c und d definieren den Wert von u entlang der charakteristischen Kurven. Daraus folgt die Lösungdarstellung

$$u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)$$

mit einer beliebigen $\mathcal{C}^1$–Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Quasilineare inhomogene Differentialgleichungen

Die Methode der Charakteristiken läßt sich auf Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u)u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

übertragen. Man betrachtet dazu das erweiterte Problem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u)U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u)U_u = 0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit der unbekannten Funktion $U = U(\mathbf{x}, u)$ von $(n+1)$ unabhängigen Variablen $\mathbf{x}$ und u.

Dann gilt: Ist $U(\mathbf{x}, u)$ eine Lösung mit $U_u \neq 0$, so ist durch $U(\mathbf{x}, u) = 0$ implizit eine Lösung $u = u(\mathbf{x})$ des Ausgangsproblems gegeben.

Quasilineare inhomogene Differentialgleichungen II

Beweis

Gilt $U_u \neq 0$, so läßt die Funktion $U(x, u)$ nach dem Satz über implizite Funktionen nach $u(\mathbf{x})$ auflösen. Wegen $U(\mathbf{x}, u) = 0$ gilt dann

$$U_{x_i} + U_u u_{x_i} = 0.$$

Ferner haben wir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u)U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u)U_u = 0$$

und daraus folgt

$$-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u)u_{x_i}\right) U_u + b(\mathbf{x}, u)U_u = 0.$$

Wir erhalten also mit $U_u \neq 0$ die Differentialgleichung

$$\sum a_i(\mathbf{x}, u)u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u).$$

Beispiel einer quasilinearen Gleichung

Beispiel

Gesucht ist die allgemeine Lösung der quasilinearen Gleichung

$$(1+x)u_x - (1+y)u_y = y - x.$$

Das erweiterte Problem lautet dann

$$(1+x)U_x - (1+y)U_y + (y-x)U_u = 0.$$

Das charakteristische Differentialgleichungssystem ist

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1+x \\ \dot{y} &= -(1+y) \\ \dot{u} &= y-x \end{aligned}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t - 1 \\ y(t) &= c_2 e^{-t} - 1 \\ u(t) &= c_3 - c_2 e^{-t} - c_1 e^t. \end{aligned}$$

Beispiel einer quasilinearen Gleichung

Beispiel

Wir verfahren wie im letzten Beispiel und lösen das charakteristische System auf:

$$e^t = \frac{x+1}{c_1} = \frac{1}{c_2(y+1)} \quad \Rightarrow \quad (x+1)(y+1) = c_1/c_2 = c \in \mathbb{R}$$

und

$$u = c_3 - (x+1) - (y+1) \quad \Rightarrow \quad u + x + y = d \in \mathbb{R}.$$

Wieder bestimmen alleine die beiden Konstanten c, d das Lösungsverhalten. Daraus folgt die **implizite** Lösungdarstellung

$$\Phi\Big((x+1)(y+1), u+x+y\Big) = 0$$

mit einer beliebigen $\mathcal{C}^1$–Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Beachte: Im Gegensatz zu linearen Gleichungen erhält man bei quasilinearen Gleichungen keine explizite Lösungsdarstellung und die Lösung existiert gegebenenfalls nur lokal.

Anfangswertaufgaben

Wir betrachten nun den in Anwendungen häufig auftretenden Fall einer Zeitvariablen t und n Ortsvariablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definition

Das auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

bezeichnet man als ein **Cauchy–Problem**.Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Anfangsbedingung

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$$

explizit vorgegeben.

Die konkreten Lösungen lassen sich dann wiederum mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens berechnen.

Transportgleichung

Ein typisches **Beispiel** ist die Transportgleichung aus Kapitel 1:

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit dem konstanten Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Verwenden wir hier die Methode der Charakteristiken, so erhalten wir zunächst die $(n+1)$ Differentialgleichungen

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \qquad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{a}$$

und wir können ohne Einschränkung $t = \tau$ annehmen. Die Lösung der zweiten Gleichung lautet

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \cdot t,$$

mit einer Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Die charakteristischen Kurven sind also gerade Geraden, die zur Zeit $t = 0$ den Punkt $\mathbf{x}_0$ durchlaufen und in Richtung $\mathbf{a}$ laufen.

Konkrete Lösung

Möchte man die Lösung an einem Punkt $(\mathbf{x}, t)$ bestimmen, so sucht man zunächst die zugehörige Charakteristik, die durch diesen Punkt läuft und den Wert $\mathbf{x}_0$ zur Zeit $t = 0$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{a}t.$$

Da die Lösung entlang der Charakteristiken konstant bleibt, folgt sofort die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t).$$

Interpretation dieser Lösung:
Das gegebene Anfangsprofil $u_0(\mathbf{x})$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ weitertransportiert, ohne seine Form zu ändern.
Probe: Es gilt:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{a}\nabla u_0, \ \nabla u(\mathbf{x}, t) = \nabla u_0 \quad \Rightarrow \quad u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0.$$

Ein Beispiel

Beispiel

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + txu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = \sin x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}.$$

Die charakteristische Gleichung lautet dann

$$\dot{x} = tx, \qquad x(0) = x_0$$

und besitzt die Lösung

$$x(t) = x_0 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Daraus folgt die Lösungsdarstellung für das Anfangswertproblem:

$$u(x, t) = \sin\left[x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right].$$

Cauchy–Problem

Wir kehren zu dem anfangs definierten Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

zurück. Das charakteristische System lautet dann

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}, t, u) \\ \dot{u} &= b(\mathbf{x}, t, u) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ und $u(0) = u_0(\mathbf{x}_0)$. Dies ist ein gekoppeltes nichtlineares Differentialgleichungssystem, das unter Umständen nur lokale Lösungen in der Zeit besitzt. Im Allgemeinen wird daher die Methode der Charakteristiken nur lokal in der Zeit eine Lösung liefern.

Nichtlineare skalare Erhaltungsgleichungen

Beispiel (für lokale Lösungen in der Zeit)

Eine wichtige Klasse von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung sind die nichtlinearen skalaren Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension. Das zugehörige Cauchy–Problem lautet:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}.$$

Die gegebene Funktion $f = f(u)$ nennt man die **flussfunktion**. Solche Differentialgleichungen sind quasilinear, denn eine andere Darstellung der PDE ist

$$u_t + a(u) u_x = 0$$

mit $a(u) = f'(u)$. Man nennt die Funktion $a(u)$ auch in Analogie zur Transportgleichung die **lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit**.

Burgers Gleichung (Johannes Martinus Burgers (13.1.1895-7.6.1981))

Die wohl berühmteste Erhaltungsgleichung ist die sogenannte **Burgers Gleichung** mit der Flussfunktion $f(u) = u^2/2$.
Wir betrachten im Folgenden das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \le 0 \\ 1 - x & : \quad 0 < x < 1 \\ 0 & : \quad x \ge 1 \end{cases} .$$

Wir verwenden die Methode der Charakteristiken, um die Lösung zu bestimmen. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0.$$

Charakteristiken bei Burgers Gleichung

Die die Lösung der Burgers Gleichung entlang der Kurve $x(t)$ konstant bleibt, gilt

$$\dot{x} = u_0(x_0) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + tu_0(x_0).$$

Das sieht zwar harmlos aus, ist es aber keineswegs! Mit der gegebenen Anfangsbedingung $u_0(x)$ erhalten wir

$$x(t) = \begin{cases} t + x_0 & : \quad x_0 \le 0 \\ (1 - x_0)t + x_0 & : \quad 0 < x_0 < 1 \\ x_0 & : \quad x_0 \ge 1 \end{cases}$$

Das zugehörige Bild der charakteristischen Kurven: