Inhomogene Randwerte

Bis jetzt:
Anfangsrandwertprobleme mit homogenen Randbedingungen, d.h.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= f(x,t) &: 0 < x < \ell,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) &= g(x) &: 0 \leq x \leq \ell \\ u(0,t) &= u(\ell,t) = 0 &: 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Was passiert

1. bei (einseitig **Neumannschen**) Randbedingungen der Form
$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = 0,$$
2. bei **periodischen** Randbedingungen der Form
$$u(0,t) = u(\ell,t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t)$$

Wie sehen die entsprechenden Fourier–Methoden aus?

Inhomogene Randwerte II

Wir betrachten zunächst das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= f(x,t) &: 0 < x < \ell,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) &= g(x) &: 0 \leq x \leq \ell \\ u(0,t) &= 0 &: 0 \leq t \leq T \\ u_x(l,t) &= 0 &: 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Bemerkung

Beschreibt die Funktion $u(x,t)$ eine orts– und zeitabhängige Temperaturverteilung, so bedeutet

1. *die Bedingung $u(0,t) = 0$, dass das linke Ende des Intervalls $[0,\ell]$ mit einem unendlich großen Eisbad in Kontakt steht,*
2. *die Bedingung $u_x(\ell,t) = 0$, dass am rechten Ende kein Wärmefluss nach rechts existiert, d.h. das rechte Ende des Intervalls ist* **perfekt wärmeisoliert**.

Randbedingungen

Die Fourier–Reihe

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

kann **keine** Lösung sein, denn unabhängig von den (zeitabhängigen) Koeffizienten gilt dann stets

$$u(0,t)=u(\ell,t)=0.$$

Die im Problem vorgegebenen Randbedingungen

$$u(0,t)=0, \qquad u_x(\ell,t)=0$$

werden zum Beispiel durch die Funktion

$$u(x,t)=\sin\left(\frac{\pi x}{2\ell}\right)$$

erfüllt.

Randbedingungen II

Diese Funktion beschreibt gerade eine Viertel–Sinuswelle.
Funktionen mit höheren Frequenzen erhalten wir, wenn wir daran eine halbe Sinuswelle anhängen, also

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2\ell}+\frac{k\pi x}{\ell}\right), \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Die Funktionen höherer Frequenzen sind dann von der Form

$$u(x,t)=\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\right), \qquad n\in\mathbb{N}. \quad n\geq 2.$$

Ein **Lösungsansatz** für das vorgegebene Anfangsrandwertproblem, der automatisch die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt, lautet damit

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\right).$$

Ein Anfangsrandwertproblem

Beispiel

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \; 0 < x < 50,\; 0 < t \leq T \\ u(x,0) = 5 - \frac{1}{5}|x-25| & : \; 0 \leq x \leq 50 \\ u(0,t) = 0 & : \; 0 \leq t \leq T \\ u_x(50,t) = 0 & : \; 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Die Berechnung der Fourier–Koeffizienten von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x-25|$ ergibt

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{25}\int_0^{50}\left(5 - \frac{1}{5}|x-25|\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{100}\right)dx \\ &= -\frac{80(-\sqrt{2}\sin(n\pi/2) + \sqrt{2}\cos(n\pi/2) - (-1)^n)}{\pi^2(2n-1)^2} \end{aligned}$$

Ein Anfangsrandwertproblem II

Beispiel (Fortsetzung)

Mit dem Lösungsansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\right)$$

erhalten wir durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung und Koeffizientenvergleich mit der Fourier–Reihe von $g(x)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dt} + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4\cdot 50^2}a_n &= 0 \\ a_n(0) &= b_n \qquad n = 1,2,\ldots. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet dann

$$a_n(t) = b_n e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{10000}t}.$$

Rolle der Randwerte

Sind beide Enden **wärmeisoliert**, so haben wir das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} &=& f(x,t) &: \ 0 < x < \ell,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) &=& g(x) &: \ 0 \le x \le \ell \\ u_x(0,t) &=& 0 &: \ 0 \le t \le T \\ u_x(\ell,t) &=& 0 &: \ 0 \le t \le T \end{array}\right. .$$

jetzt erfüllen die Funktionen

$$u(x,t) = 1, \qquad u_n(x,t) = \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

die vorgegebenen Neumannschen Randbedingungen.
Ein **Lösungsansatz** lautet damit

$$u(x,t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Fouriermethode im Beispiel

Beispiel

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t &=& u_{xx} &: \ 0 < x < 50,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) &=& 5 - \frac{1}{5}|x-25| &: \ 0 \le x \le 50 \\ u_x(0,t) &=& 0 &: \ 0 \le t \le T \\ u_x(50,t) &=& 0 &: \ 0 \le t \le T \end{array}\right.$$

Mit dem Lösungsansatz

$$u(x,t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

ergibt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\frac{db_0}{dt}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{50^2} b_n(t)\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right) = 0.$$

Fouriermethode im Beispiel II

Beispiel (Fortsetzung)

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet dann

$$\frac{db_0}{dt}(t) = 0, \qquad \frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{50^2} b_n(t) = 0.$$

Um die zugehörigen Anfangsbedingungen festzulegen, bestimmen wir die Fourier–Reihe der Anfangsbedingung $g(x)$, d.h.

$$g(x) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

mit den Fourier–Koeffizienten

$$d_0 = \frac{1}{50}\int_0^{50} g(x)\,dx \qquad d_n = \frac{2}{50}\int_0^{50} g(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)\,dx.$$

Fouriermethode im Beispiel III

Beispiel (Fortsetzung)

Man berechnet

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{5}{2} \\ d_n &= \frac{20(2\cos(n\pi/2) - 1 - (-1)^n)}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $b_0(t), b_1(t), \ldots$ ergeben sich damit als

$$b_n(t) = d_n e^{-\lambda_n t}$$

mit

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{2500}$$

Fouriermethode im Beispiel IV

Beispiel (Fortsetzung)

und die Lösung lautet

$$u(x,t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right).$$

Periodische Randbedingungen

Wir kommen nun zu **periodischen** Randbedingungen und dem Anfangsrandwertproblem auf dem **Intervall** $[-\ell,\ell]$ gegeben durch

$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t - u_{xx} & = & f(x,t) & : \quad -\ell < x < \ell,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) & = & g(x) & : \quad -\ell \le x \le \ell \\ u(-\ell,t) & = & u(\ell,t) & : \quad 0 \le t \le T \\ u_x(-\ell,t) & = & u_x(\ell,t) & : \quad 0 \le t \le T \end{array}\right.$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall $[-\ell,\ell]$ sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

Ein **Lösungsansatz** mit Hilfe von Fourier–Reihen ist damit

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right)$$

Fouriermethoden bei periodischen Randbedingungen

Mit den Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} f(x,t) &= c_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + d_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right) \\ g(x) &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(p_n\cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + q_n\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right) \end{aligned}$$

ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da_0}{dt}(t) &= c_0(t) \\ \frac{da_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}a_n(t) &= c_n(t) \\ \frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}b_n(t) &= d_n(t) \end{aligned}$$

Fouriermethoden bei periodischen Randbedingungen II

Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten

$$a_0(0) = p_0, \quad a_n(0) = p_n, \quad b_n(0) = q_n$$

Beispiel

Für das Anfangsrandwertproblem mit periodischen Randbedingungen

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \frac{1}{10}x(x^2-\pi^2) & : -\pi < x < \pi,\ 0 < t \le T \\ u(x,0) = 25 & : -\pi \le x \le \pi \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) & : 0 \le t \le T \\ u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t) & : 0 \le t \le T \end{cases}$$

ist die Fourier–Entwicklung der Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = 25 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{10n^5}\left(1 - e^{-n^2 t}\right)\sin(nx).$$

Fourier–Methoden für die Wellengleichung

Lösungen in Form von Fourier–Reihen lassen sich analog zur Wärmeleitungsgleichung ableiten.
Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= f(x,t) &: 0 < x < \ell, 0 < t \le T \\ u(x,0) &= g(x) &: 0 \le x \le \ell \\ u_t(x,0) &= h(x) &: 0 \le x \le \ell \\ u(0,t) &= u(\ell,t) = 0 &: 0 \le t \le T \end{cases}$$

und suchen eine Lösung in der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

Die Fourier–Reihen für $f(x,t)$, $g(x)$ und $h(x)$ ergeben DGL's für die Lösungskoeffizienten $a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Wellengleichung und Fouriermethoden

Beispiel

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 &: 0 < x < \ell, 0 < t \le T \\ u(x,0) &= g(x) &: 0 \le x \le \ell \\ u_t(x,0) &= h(x) &: 0 \le x \le \ell \\ u(0,t) &= u(\ell,t) = 0 &: 0 \le t \le T \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} t\right) + \frac{d_n \ell}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

Dabei sind b_n die Fourier–Koeffizienten der Entwicklung der vorgegeben Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$ und d_n die entsprechenden Koeffizienten von $u_t(x,0) = h(x)$.

Überblick numerische Verfahren

Zur numerischen Lösung gibt es **drei** klassische Ansätze:

1. **Finite–Differenzen**
   Approximation auf regulären (strukturierten) Gittern, einfache Geometrien, häufig eindimensional im Ort, alle Typen
2. **Finite–Volumen**
   Mehrdimensionale Probleme auf unstrukturierten Gittern, vor allem hyperbolische Gleichungen
3. **Finite–Elemente**
   Mehrdimensionale Probleme auf unstrukturierten Gittern, komplizierte Geometrien, vor allem elliptische Gleichungen

Wir beschränken uns auf die Darstellung von **Finiten–Differenzen–** und **Finite–Element–Methoden**.

Finite Differenzen

Wir beschränken uns auf **eindimensionale** Probleme und die folgenden Anfangs– und Anfangsrandwertprobleme

1. Cauchy–Probleme für **skalare Erhaltungsgleichungen**, also
$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$
2. Randwertprobleme für die **Poissongleichung**, also
$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x) & : \ 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$
3. Anfangsrandwertprobleme für die **Wärmeleitungsgleichung**, also
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t) & : \ 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) = g(x) & : \ 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & : \ 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Grundidee des Finiten–Differenzen Verfahrens

Approximiere die exakte Lösung **nur** an diskreten Punkten (**dem Gitter**):

$$u(x_i, t_j) \approx U(x_i, t_j) =: U_i^j$$

mit den diskreten Punkten

$$x_i = i \cdot h, \quad i \in \mathcal{Z}_x, \qquad t_j = j \cdot k, \quad j \in \mathcal{Z}_t$$

und den **Orts– und Zeitschrittweiten** h und k. Die Indexmengen $\mathcal{Z}_x$ und $\mathcal{Z}_t$ sind dabei endliche oder unendliche Teilmengen von $\mathcal{Z}$.

Beispiel

Für die Wärmeleitungsgleichung auf $[0, 1] \times [0, T]$ setzen wir

$$\begin{aligned} x_i &= i \cdot h, \quad i = 0, \ldots, n \\ t_j &= j \cdot k, \quad j = 0, \ldots, m \end{aligned}$$

mit den Orts– und Zeitschrittweiten

$$h = \frac{1}{n}, \qquad k = \frac{T}{m}$$

Finite Differenzen im Beispiel

Beispiel (Fortsetzung)

Zur Berechnung der diskreten Werte U_i^j benötigen wir die Approximation von Ableitungen:
Wir approximieren die Ableitung $u_x(x, t)$ an der Stelle $(x, t) = (x_i, t_j)$:

1. **Zentrale Differenzen**

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}$$

2. **Vorwärtsdifferenz**

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h}$$

3. **Rückwärtsdifferenz**

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h}$$

Genauigkeit

Approximationsgüte von Finiten–Differenzen Sei $u(x,t)$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion und (x_i,t_j) ein fester Punkt eines Gitters mit Orts– und Zeitschrittweite h und k.
Mittels einer Taylorentwicklung um (x_i,t_j) erhalten wir

$$\begin{aligned}
u(x_{i+1},t_j) &= u(x_i,t_j) + u_x(x_i,t_j)\underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{=h} + \\
&\quad \frac{1}{2}u_{xx}(x_i,t_j)\underbrace{(x_{i+1}-x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6}u_{xxx}(x_i,t_j)\underbrace{(x_{i+1}-x_i)^3}_{=h^3} + \dots \\
u(x_{i-1},t_j) &= u(x_i,t_j) + u_x(x_i,t_j)\underbrace{(x_{i-1}-x_i)}_{=-h} + \\
&\quad \frac{1}{2}u_{xx}(x_i,t_j)\underbrace{(x_{i-1}-x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6}u_{xxx}(x_i,t_j)\underbrace{(x_{i-1}-x_i)^3}_{=-h^3} + \dots
\end{aligned}$$

Genauigkeit II

Wir erhalten damit

1. bei **Zentralen Differenzen**

$$\left| u_x(x_i,t_j) - \frac{u(x_{i+1},t_j) - u(x_{i-1},t_j)}{2h} \right| = O(h^2)$$

$\Rightarrow$ Approximation **zweiter** Ordnung in h.

2. bei **Vorwärtsdifferenzen**

$$\left| u_x(x_i,t_j) - \frac{u(x_{i+1},t_j) - u(x_i,t_j)}{h} \right| = O(h)$$

$\Rightarrow$ Approximation **erster** Ordnung in h.

3. bei **Rückwärtsdifferenzen**

$$\left| u_x(x_i,t_j) - \frac{u(x_i,t_j) - u(x_{i-1},t_j)}{h} \right| = O(h)$$

$\Rightarrow$ Approximation **erster** Ordnung in h.

Finite–Differenzen für skalare Erhaltungsgleichungen

Wir betrachten das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Mit den Notationen von oben ist ein numerisches Verfahren mit Finiten–Differenzen gegeben durch

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h}\Big(f(U_{i+1}^j) - f(U_{i-1}^j)\Big)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$U_i^0 = \frac{1}{h} \int\limits_{x_i - h/2}^{x_i + h/2} u_0(x)\, dx.$$

Also: Zentrale Differenz im Ort, Vorwärtsdifferenz in der Zeit.

Finite–Differenzen für skalare Erhaltungsgleichungen II

Beispiel

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \leq 0 \\ -1 & : \quad x > 0 \end{cases}$$

Die Anfangsbedingung ist gleichzeitig die Lösung für $t > 0$!

$$U_i^{j+1} \quad = \quad U_i^j - \frac{k}{2h}\left(\frac{(U_{i+1}^j)^2}{2} - \frac{(U_{i-1}^j)^2}{2}\right)$$

$$U_i^0 \quad = \quad \begin{cases} 1 & : \quad i < 0 \\ 0 & : \quad i = 0 \\ -1 & : \quad i > 0 \end{cases}$$