Differentialgleichungen II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Technische Universität Hamburg-Harburg

Reiner Lauterbach

Universität Hamburg

SS 2006

Partielle Differentialgleichungen

Definition

Eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}\right) = 0$$

für eine gesuchte Funktion $\mathbf{u} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein **System partieller Differentialgleichungen** (PDE) für die m Funktionen $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})$.

Definition

Tritt eine der partiellen Ableitungen p–ter Ordnung $\dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}$ explizit auf, so spricht man von einer partiellen DGL der **Ordnung** p.

Typischerweise treten in Anwendungen (Systeme) partielle(r) Differentialgleichungen **erster und zweiter Ordnung** auf.

Definition

1) Eine PDE heißt **linear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin–linear in den Variablen $\mathbf{u}, \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist.
2) Eine PDE heißt **semilinear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin–linear in den Variablen $\dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \dots, \dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist **und** die Koeffizienten nur von $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ abhängen.
3) Eine PDE heißt **quasilinear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin–linear in den Variablen $\dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \dots, \dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist. Die Koeffizienten können dann von $\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial^{p-1} \mathbf{u}}{\partial x_n^{p-1}}\right)$ abhängen.
4) In allen anderen Fällen ist die PDE **nichtlinear**.

Beispiele partieller Differentialgleichungen

Beispiel

1) Skalare lineare PDE 1. Ordnung in zwei Variablen

$$a_1(x, y)u_x + a_2(x, y)u_y + b(x, y)u = c(x, y)$$

2) Skalare quasilineare PDE 1. Ordnung in zwei Variablen

$$a_1(x, y, u)u_x + a_2(x, y, u)u_y = g(x, y, u)$$

3) Semilineare PDE (System) 2. Ordnung in n Variablen

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \dots, x_n)\mathbf{u}_{x_i x_j} = b(x_1, \dots, x_n, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{x_1}, \dots, \mathbf{u}_{x_n})$$

4) Nichtlineare skalare PDE 1. Ordnung in zwei Variablen

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = f(x, y, u, u_x \cdot u_y)$$

Orts- und Zeitvariablen

Bemerkung

In Anwendungen treten typischerweise **Ortsvariablen** $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, *(oft* $n = 3$*) sowie die* **Zeitvariable** $t \in \mathbb{R}$ *auf.*
Wir betrachten die allgemeine PDE der Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial t^p}\right) = 0$$

in $(n+1)$ *Variablen. Differentialoperatoren wie etwa*

$$\nabla \quad \mathit{div} \quad \mathit{rot} \quad \mathit{oder} \quad \Delta$$

beziehen sich dann stets auf die n *Ortsvariablen, zum Beispiel*

$$\mathit{div} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Wieso partielle Differentialgleichungen?

Beispiel (Der Reynoldsche Transportsatz)

Zur Zeit $t = 0$ nehme eine physikalische Größe (Ladung, Fluid etc.) die beschränkte und offene Menge $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ ein. Die Funktion $\Phi(\mathbf{y}, t)$ beschreibe die Veränderung eines Punktes $\mathbf{y}_0 \in D_0$ in der Zeit:

$$\Phi : D_0 \times [0, T] \to D_t \subset \mathbb{R}^n,$$

sodass

$$D_t := \{\Phi(\mathbf{y}, t) \ : \ \mathbf{y} \in D_0\}.$$

Die **Trajektorie** von $y \in D_0$ ist die Abbildung $t \longrightarrow \Phi(y, t) \in D_t$ und

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{y}, t) = \mathbf{v}(\Phi(\mathbf{y}, t), t)$$

bezeichne das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ der physikalischen Größe.

Reynoldscher Transportsatz

Satz

Für eine beliebige differenzierbare, skalare Funktion $f : D_t \times [0, T] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\int_{D_t} f(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} = \int_{D_t}\left\{\frac{\partial}{\partial t}f + div(f\mathbf{v})\right\}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}.$$

Beweisidee: Sei $J(\mathbf{y},t) = \det(D_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{y},t))$ transformiere damit D_t auf D_0:

$$\int_{D_t} f(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} = \int_{D_0} f(\Phi(\mathbf{y},t),t)J(\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}.$$

Berechne dann die zeitliche Ableitung der rechten Seite

$$\frac{d}{dt}\int_{D_0} f(\Phi(\mathbf{y},t),t)J(\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}$$

und transformiere zurück auf das zeitabhängige Gebiet D_t.

Die Kontinuitätsgleichung

Sei $u(x,t)$ die Massendichte einer physikalischen Größe und es gelte ein **Erhaltungsprinzip** der Form:

$$\frac{d}{dt}\int_{D_t} u(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} = 0.$$

Dann folgt aus dem Reynoldschen Transportsatz:

$$\int_{D_t}\left\{\frac{\partial}{\partial t}u + \operatorname{div}(u\mathbf{v})\right\}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} = 0.$$

Da D_t eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, folgt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x},t) + \operatorname{div}(u\mathbf{v})(\mathbf{x},t) = 0.$$

Diese wichtige Gleichung wird als **Kontinuitätsgleichung** bezeichnet.

Transportgleichung

Wir schreiben die Kontinuitätsgleichung mit der **flussfunktion** $q(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) = 0.$$

Eine Gleichung für zwei unbekannte Funktionen $u(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$?
Deshalb: Modellierungsansatz $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}(u(\mathbf{x}, t), \nabla u(\mathbf{x}, t), \ldots)$.

Beispiel

Der Fluss **q** ist proportional zur Dichte u, i.e.

$$\mathbf{q}(x, t) := \mathbf{a} \cdot u(x, t), \qquad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla u(x, t) = 0.$$

Man nennt diese Gleichung auch die **Transportgleichung**.

Wärmeleitungsgleichung

Beispiel (Wärmeleitungs– oder Diffusionsgleichung)

Die Dichte $u(x, t)$ beschreibe

- eine chemische Konzentration
- die Temperatur
- ein elektro–statisches Potential

Physikalische Modellierung: der fluss **q** ist proportional zum Gradienten der Dichte u, zeigt allerdings in die entgegengesetzte Richtung, i.e.

$$\mathbf{q}(x, t) := -a\nabla u(x, t), \qquad a > 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(-a\nabla u(x, t)) = 0$$

und damit die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = a\Delta u(x, t).$$

Wärmeleitungsgleichung II

Setzen wir $a = 1$, so erhalten wir die klassische Wärmeleitungsgleichung oder auch (lineare) Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = \Delta u(x, t).$$

Die Abschlussrelation

$$\mathbf{q}(x, t) := -a \nabla u(x, t), \qquad a > 0$$

nennt man dabei entweder

- das Ficksche Gesetz der Diffusion,
- das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung oder
- das Ohmsche Gesetz der elektrischen Ladung

Beachte: Drei unterschiedliche physikalische Probleme liefern eine identische partielle Differentialgleichung.

Laplace- und Poissongleichung

Beispiel

Ist die Lösung der Wärmeleitungsgleichung unabhängig von der Zeit t, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = 0,$$

so erhält man eine Lösung der **Laplacegleichung**

$$\Delta u(x) = 0.$$

Lösungen dieser Gleichung nennt man **harmonische Funktionen**.
Die Gleichung

$$\Delta u(x) = f$$

mit gegebener Funktion f, nennt man **Poissongleichung**.
Hierbei beschreibt die Inhomogenität etwa eine vorgegebene räumliche Ladungsverteilung f und die Lösung u das dadurch erzeugte Potential.

Quasilineare Gleichungen 1. Ordnung und Charakteristiken

Wir betrachten zunächst eine skalare quasilineare PDE 1. Ordnung gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Eine Lösung kann durch die **Charakteristikenmethode** berechnet werden, wobei wir zunächst den homogenen und **linearen** Fall betrachten.

Definition

Das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$$

heißt das **charakteristische Differentialgleichungssystem** einer homogenen linearen PDE

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Methode der Charakteristiken

Wir berechnen nun

$$\frac{d}{dt} u(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}(t)) u_{x_i}(x(t)).$$

Daraus folgt aber sofort:
Die Funktion $u(\mathbf{x})$ ist genau dann eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, wenn u entlang jeder Lösung $\mathbf{x}(t)$ des charakteristischen Differentialgleichungssystems konstant ist, d.h.

$$u(\mathbf{x}(t)) = \text{const.}$$

Definition

Man nennt die Lösung $u(\mathbf{x})$ dann ein **erstes Integral** des charakteristischen Differentialgleichungssystems.

Die Methode der Charakteristiken ist also nicht anderes als eine Zurückführung der gegebenen PDE auf gewöhnliche DGL's.