

1. Stabilität
2. Lineare Systeme und Stabilität
3. Nichtlineare Gleichungen und Stabilität

Gegeben sei eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n \quad (8)$$

mit hinreichend glatter rechten Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.

Weiter sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine spezielle Lösung.

Frage: Wie verhalten sich **benachbarte** Lösungen $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$?

Beispiel

Wir betrachten die beiden Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} y'(t) &= \pm y(t) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist die Lösung $y^*(t) = 0$.

Lösungen $y(t; 0, y_0)$ mit der Anfangsbedingung $y_0 \neq 0$ sind:

$$y(t) = y_0 e^t \rightarrow \pm\infty \quad y(t) = y_0 e^{-t} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

Definition

- 1) Eine Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ von (8) heißt **stabil** auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, falls es zu $t_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass
- $$\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t)\| < \varepsilon \quad (\forall t \in I)$$

Kann man δ **unabhängig** von t_0 wählen, so heißt $\mathbf{y}^*(t)$ **gleichmäßig stabil** auf I .

- 2) Ist $\mathbf{y}^*(t)$ auf $I = [a, \infty)$ erklärt, so heißt $\mathbf{y}^*(t)$ **asymptotisch stabil**, falls $\mathbf{y}^*(t)$ stabil ist und es zu $t_0 \in I$ ein $\delta(t_0) > 0$ gibt mit der Eigenschaft

$$\forall \mathbf{y}_0 : \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t_0)\| = 0.$$

$\mathbf{y}^*(t)$ heißt **strikt stabil**, falls $\mathbf{y}^*(t)$ gleichmäßig und asymptotisch stabil ist.

Stabilität der Nulllösung

Bemerkung

Sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung (8). Setzen wir

$$\mathbf{z}(t) := \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t)$$

so erfüllt $\mathbf{z}(t)$ die Differentialgleichung

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t) + \mathbf{y}^*(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*(t)) =: \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$$

Gleichzeitig ist $\mathbf{z}^*(t) = \mathbf{0}$ eine Lösung von

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t)). \quad (9)$$

Statt der Stabilität von $\mathbf{y}^*(t)$ können wir also auch die Stabilität der Nulllösung von (9) untersuchen.

Für ein lineares Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \quad a \leq t < \infty$$

mit $t \mapsto \mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ stetig, sei $\mathbf{Y}(t)$ ein Fundamentalsystem.

Lineare Differential – Stabilitätssatz

Satz (Stabilitätssatz I)

- 1) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann stabil auf $I = [a, \infty)$, falls das Fundamentalsystem $\mathbf{Y}(t)$ auf I beschränkt ist.
- 2) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann gleichmäßig stabil auf I , falls es eine Konstante $M > 0$ gibt mit

$$\forall t \geq t_0 \geq a \quad : \quad \|\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\| \leq M.$$

- 3) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, falls gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{Y}(t)\| = 0.$$

Satz

Sei $\lambda(t)$ der größte Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T$. Gilt

$$\int_{t_0}^{\infty} \lambda(t) dt = -\infty,$$

so folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = 0$ für jede Lösung $\mathbf{y}(t)$, d.h. $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist asymptotisch stabil.

Stabilität und Spektrum – Beweis

Beweis.

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{y}\|^2 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{y}^T \mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{y})^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T (\mathbf{A}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}) \mathbf{y} \\ &\leq \lambda(t) (\mathbf{y}^T \mathbf{y}) = \lambda(t) \cdot \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Integration

$$\|\mathbf{y}(t)\|^2 \leq \|\mathbf{y}_0\|^2 \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau \right)$$

□

Satz (Stabilitätssatz II)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ konstante Matrix. Die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist genau dann

- 1) **strikt stabil**, falls für alle Eigenwerte von \mathbf{A} gilt: $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$.
- 2) **gleichmäßig stabil**, falls für alle Eigenwerte von \mathbf{A} gilt:

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow g(\lambda_j) = a(\lambda_j).$$

- 3) In allen anderen Fällen ist die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{0}$ instabil.

Stabilität und Spektrum – Ein Beispiel

Beispiel

Die Nulllösung des Systems mit Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

ist instabil.

Eigenwerte sind $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 0$, und $g(\lambda_2) = 1 < a(\lambda_2) = 2$.

Beispiel

Wir betrachten das DGL-System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gleichgewichtspunkte sind genau die Lösungen des LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und daher ist $\mathbf{y}^* = (3, -2)^T$ ein Gleichgewichtspunkt.

Stabilität und Spektrum – Zweites Beispiel II

Beispiel (Fortsetzung)

Die Transformation $\mathbf{z} := \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$ liefert das homogene Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z}$$

und die Eigenwerte von \mathbf{A} sind

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

Damit ist \mathbf{y}^* strikt stabil.

Satz (Kriterium von Routh und Hurwitz)

Gegeben sei das reelle Polynom

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_n > 0$$

Dann sind äquivalent:

- 1) Alle Nullstellen von $p(z)$ haben negativen Realteil.

Routh–Hurwitz Kriterium II

Satz (Kriterium von Routh und Hurwitz – Fortsetzung)

- 2) Für $k = 0, 1, \dots, n$ gilt $a_k > 0$. Alle Hauptunterdeterminanten der folgenden (n, n) -Matrix sind positiv:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

wobei für $k > n$ gelte $a_k = 0$.

Beispiel

Gegeben sei das Polynom mit strikt positiven Koeffizienten

$$p(z) = 2z^3 + 4z^2 + 5z + 6.$$

Wir stellen zunächst die $(3, 3)$ -Matrix \mathbf{H} auf:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das Routh-Hurwitz Kriterium im Beispiel II

Beispiel (Fortsetzung)

Die Hauptunterdeterminanten sind $\det \mathbf{H}_1 = |5| = 5$ sowie

$$\det \mathbf{H}_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$\det \mathbf{H}_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

Also besitzen alle Nullstellen von $p(z)$ einen negativen Realteil.

Wir betrachten das nichtlineare **autonome** System

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$$

wobei $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gilt, d.h. $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist ein Gleichgewichtspunkt des Systems.

Stabilitätsuntersuchung mittels **Linearisierung** der rechten Seite:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{A} &= \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{0}), \quad \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{y}) &= \mathbf{o}(\|\mathbf{y}\|)\end{aligned}$$

Die Beziehung

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{0})\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

ist die **Taylor-Entwicklung** um den Entwicklungspunkt $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$.

Stabilitätssatz im nichtlinearen Fall

Satz (Stabilitätssatz III)

Unter den obigen Voraussetzungen gelten:

- 1) *Ist für alle Eigenwerte λ_j von $\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{0})$:*

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0,$$

so ist $\mathbf{y}^ = \mathbf{0}$ ein strikt stabiler Gleichgewichtspunkt von $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, d.h. die Stabilität des linearisierten Systems überträgt sich auf das nichtlineare System.*

- 2) *Existiert ein Eigenwert λ_j von \mathbf{A} mit:*

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0,$$

so ist der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}^ = \mathbf{0}$ instabil, d.h. die Instabilität des linearisierten Problems überträgt sich ebenfalls auf das nichtlineare Problem.*

Bemerkung

Die Stabilitätsuntersuchung eines nichtlinearen Systems mittels Linearisierung funktioniert **nicht**, falls

1) für alle Eigenwerte λ_j von \mathbf{A} gilt:

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0,$$

2) **und** für mindestens ein Eigenwert λ_j gilt:

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0,$$

Das mathematische Pendel

Beispiel

Das mathematische Pendel wird beschrieben durch die nichtlineare DGL

$$\ddot{\Phi} = -\frac{g}{\ell} \sin \Phi = -\omega^2 \sin \Phi.$$

Dabei ist

Beispiel (Fortsetzung)

Dabei ist

- ▶ $\Phi = \Phi(t)$ der Auslenkungswinkel zur Zeit t ,
- ▶ ℓ die Länge des Pendels,
- ▶ und g die Gravitationskonstante.

Mittels der Substitution

$$y_1 := \Phi \quad y_2 = \dot{\Phi}$$

erhalten wir das DGL-System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 \sin y_1 \end{aligned}$$

Das mathematische Pendel III

Beispiel (Fortsetzung)

Die Gleichgewichtspunkte sind gerade die Nullstellen der rechten Seite, also

$$y_{1k} = k\pi, \quad y_{2k} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Beispiel (Fortsetzung)

Die **nichtlineare** rechte Seite des Systems ist:

$$\mathbf{f}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \sin y_1 \end{pmatrix}$$

Wir linearisieren um den Gleichgewichtspunkt $(y_{1k}, y_{2k}) = (k\pi, 0)$:
und erhalten

Das mathematische Pendel V

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(y_1, y_2) &= \underbrace{\mathbf{f}(y_{1k}, y_{2k})}_{=0} + \mathbf{J}\mathbf{f}(y_{1k}, y_{2k}) \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^k\|) \\ &= \mathbf{J}\mathbf{f}(k\pi, 0) \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^k\|) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos k\pi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^k\|) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^k\|) \end{aligned}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Daraus ergibt sich das linearisierte System:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2(-1)^k(y_1 - k\pi)\end{aligned}$$

Wir berechnen die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2(-1)^k$$

Das mathematische Pendel VII

Beispiel (Fortsetzung)

Für die Eigenwerte folgt daraus:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \pm i\omega & : \text{ falls } k \text{ gerade} \\ \pm \omega & : \text{ falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Phasenportrait auf dem Einband von Ansorge, Oberle, Band 2!