

1. Numerische Verfahren
2. Euler–Verfahren
3. Verfahren von Heun
4. Runge-Kutta Verfahren

## Ausblick auf die heutige Vorlesung

1. Numerische Verfahren bei Randwertproblemen
2. Schießverfahren
3. Mehrzielverfahren

Wir betrachten ein Randwertproblem zweiter Ordnung der Form

$$\begin{aligned}y'' &= f(t, y, y') \\ y(a) &= y_a, \quad y(b) = y_b.\end{aligned}$$

### Idee eines Schießverfahrens:

Kombiniere ein numerisches Verfahren für das zugehörige Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y'' &= f(t, y, y') \\ y(a) &= y_a, \quad y'(a) = z\end{aligned}$$

mit einem iterativen Prozess bezüglich des (freien) Parameters  $z$ , um die rechte Randbedingung zu erfüllen, d.h.

$$y(b) = y_b.$$

## Nullstellenproblem

Bezeichnet  $y(t; z)$  die Lösung des Anfangswertproblems, so führt das Schießverfahren auf ein Nullstellenproblem der Funktion

$$F(z) = y(b; z) - y_b.$$

### Beispiel

Für die Randwertaufgabe

$$y'' = -y, \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 1$$

ist die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems

$$y'' = -y, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = z$$

gegeben durch

$$y(x) = z \sin x + 4 \cos x.$$

Die Funktion  $F(z)$  lautet daher

$$F(z) = z \sin 1 + 4 \cos 1 - 1.$$

## Beispiel (Fortsetzung)

Zur Lösung des Nullstellenproblems  $F(z) = 0$  kennen wir zwei Verfahren:

- 1) **Das Bisektionsverfahren** Seien  $z_1$  und  $z_2$  zwei Punkte mit  $F(z_1) \cdot F(z_2) < 0$ :

$$z_3 := \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$
$$\text{Falls } F(z_1) \cdot F(z_3) < 0 : z_1 := z_3$$
$$\text{sonst} : z_1 := z_2$$

- 2) **Das Newtonverfahren** mit Iterationsvorschrift:

$$z_{k+1} = z_k - \frac{F(z_k)}{F'(z_k)}$$

Das Newton Verfahren konvergiert i.A. quadratisch, aber man muss die Ableitung  $F'(z_k)$  berechnen.

## Allgemeine Zweipunkt-Randwertprobleme

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$$
$$\mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = \mathbf{0}$$

**Schiessverfahren:** Betrachte das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$$
$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$$

mit der Lösung  $\mathbf{y}(t; \mathbf{z})$

Das äquivalente Nullstellenproblem lautet jetzt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{r}(\mathbf{z}, \mathbf{y}(b, ; \mathbf{z})) = \mathbf{0}.$$

Die Funktion  $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  ist glatt, falls  $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  und  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  hinreichend oft stetig differenzierbar sind.

Zur Lösung des Nullstellenproblems  $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = 0$  verwendet man etwa das **gedämpfte Newton–Verfahren** aus Analysis III:

$$\begin{aligned} \text{für } k = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{Jf}(\mathbf{z}^k) \cdot \Delta \mathbf{z}^k &= -f(\mathbf{z}^k) \\ \mathbf{z}^{k+1} &= \mathbf{z}^k + \lambda_k \Delta \mathbf{z}^k. \end{aligned}$$

Dabei ist die Jacobi–Matrix  $\mathbf{Jf}(\mathbf{z})$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{Jf}(\mathbf{z}) &= \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b \cdot \mathbf{Y}(b) \\ \mathbf{B}_a &:= \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|_{(\mathbf{z}, \mathbf{y}(b; \mathbf{z}))} \\ \mathbf{B}_b &:= \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|_{(\mathbf{z}, \mathbf{y}(b; \mathbf{z}))} \\ \mathbf{Y}(b) &:= \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{y}(b; \mathbf{z}). \end{aligned}$$

## Scheitern des Schießverfahrens

Beispiel (für das das Schießverfahren **nicht** funktioniert)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} y'' &= \lambda \sinh(\lambda y) \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 1 \end{aligned}$$

Für  $\lambda = 5$  besitzt die zugehörige Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} y'' &= \lambda \sinh(\lambda y) \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = z \end{aligned}$$

nur für  $|z| \leq 0.05$  eine Lösung, die auf dem ganzen Intervall  $[0, 1]$  existiert. Für die tatsächliche Lösung der Randwertaufgabe gilt

$$z^* = 0.0457504\dots$$

## Beispiel (Lösung kann bezüglich $z$ stark variieren)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$y'' = 12y + y', \quad y(0) = y(10) = 1.$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe kann man explizit berechnen:

$$y(t; z_1, z_2) = \frac{4z_1 - z_2}{7} e^{-3t} + \frac{3z_1 + z_2}{7} e^{4t}.$$

Mit den Randwerten  $y(0) = y(10) = 1$  folgt

$$z_1^* = y(0) = 1, \quad z_2^* = y'(0) = -3 + 2.9 \dots \cdot 10^{-17}.$$

Weiter gilt:

## Die Mehrzielmethode (multiple shooting method)

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Kombiniere das (einfache) Schießverfahren mit einer Intervallunterteilung von  $[a, b]$ :

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_m = b.$$

Man nennt die  $t_i$ 's auch die **Mehrzielknoten**.

Löse auf jedem Teilintervall (numerisch) das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ \mathbf{y}(t_j) &= \mathbf{z}_j \end{aligned}$$

und bezeichne die Lösung mit  $\mathbf{y}(t; t_j, \mathbf{z}_j)$ ,  $j = 1, \dots, m - 1$ .

## Die zusammengesetzte Lösung

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{m-1}) := \begin{cases} \mathbf{y}(t; t_1, \mathbf{z}_1) & : t_1 \leq t < t_2 \\ \mathbf{y}(t; t_2, \mathbf{z}_2) & : t_2 \leq t < t_3 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{y}(t; t_{m-1}, \mathbf{z}_{m-1}) & : t_{m-1} \leq t < t_m \end{cases}$$

erfüllt genau dann die Randwertaufgabe, wenn gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_j(\mathbf{z}_j, \mathbf{z}_{j+1}) &:= \mathbf{y}(t_{j+1}; t_j, \mathbf{z}_j) - \mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, m-2 \\ \mathbf{F}_{m-1}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_{m-1}) &:= \mathbf{r}(\mathbf{z}_1, \mathbf{y}(t_m; t_{m-1}, \mathbf{z}_{m-1})) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu einem Nullstellenproblem für die Funktion

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{m-1})^T : D \rightarrow \mathbb{R}^{(m-1)n}, \quad D \subset \mathbb{R}^{(m-1)n}.$$

Zur Lösung verwendet man wieder das gedämpfte Newton-Verfahren.