

Gewöhnliche Differentialgleichungen

für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Technische Universität Hamburg-Harburg

Reiner Lauterbach

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Universität Hamburg

WS 2005/2006

Teil I

Grundlegende Betrachtung

Was ist eine Differentialgleichung?

Definition

Ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

mit

$$\mathbf{F} : [a, b] \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{(m+1)\text{-fach}} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt ein **implizites gewöhnliches Differentialgleichungssystem der Ordnung m** .

Explizite Differentialgleichungen

Definition

Läßt sich das System nach $\mathbf{y}^{(m)}(t)$ auflösen, so ergibt sich das **explizite System** der Form:

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Lösungsbegriff

Im Folgenden suchen wir stets eine C^m -Funktion

$$\mathbf{y} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

die das Differentialgleichungssystem erfüllt, d.h. es gilt

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

für alle $t \in [a, b]$ beziehungsweise

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Skalare Gleichung erster Ordnung

Beispiel

Die skalare Gleichung erster Ordnung

$$y'(t) = y(t)$$

hat auf jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ unendlich viele Lösungen der Form

$$y(t) = C \cdot e^t, \quad C \in \mathbb{R}$$

Autonome Differentialgleichungen

Definition

Hängen die Funktionen \mathbf{F} bzw. \mathbf{f} nicht explizit von (der Zeit) t ab, so nennt man das System **autonom**, d.h.

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

oder

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Lösungen nennt man dann auch **Trajektorien** der DGL.

Problemstellungen

Problem 1: (Anfangswertaufgabe)

$$\mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}(t)), \quad a \leq t \leq b, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a \quad (\text{Anfangswert})$$

Problem 2: (Randwertaufgabe)

$$\mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}(t)), \quad a \leq t \leq b, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = 0 \quad (\text{Randwert})$$

$$\mathbf{r} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Populationsdynamik

Beispiel (Populationsmodell I)

Sei

$N(t)$ = Größe einer Population, z.B. Bakterien auf Nährboden. Die Änderung in kleinen Zeitabschnitten wird bestimmt durch

$$b = \text{Geburtenrate} \quad \text{und} \quad d = \text{Sterberate.}$$

Damit gilt

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx (b - d)N(t).$$

Der Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ ergibt die **Differentialgleichung**:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t), \quad \alpha = b - d$$

Populationsdynamik II

Beispiel

Mit der Anfangsbedingung $N(t_0) = N_0$ erhält man die eindeutige Lösung

$$N(t) = N_0 e^{\alpha(t-t_0)}$$

⇒ **Exponentielles Wachstum**

Populationsdynamik III

Bei exponentiellem Wachstum gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty.$$

Dies ist **unrealistisch!** Suche also Modell mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K < \infty$$

Populationsdynamik IV (Verhulstsches Modell)

Beispiel (Populationsmodell II)

Verhulst: Wachstumsrate hängt nichtlinear von $N(t)$ ab (Stress proportional zu $N(t)^2$, einer Modellierung der Häufigkeit von Begegnungen von Mitgliedern der Population)

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t)(K - N(t)).$$

Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\lambda K(t-t_0)}}$$

⇒ **Logistisches Wachstum.**

Beispiel aus der Mechanik

Beispiel (Regelkreisglied)

Mechanisches Feder–Dämpfer–System mit Anregung:

$y_e(t)$ = vorgegebene Eingangsgröße

$y_a(t)$ = Ausgangsgröße

K_F = $K(y_e - y_a)$ = Federkraft

K_D = $r \dot{y}_a(t)$ = Dämpferkraft

mit Federkonstante K und Dämpfungskoeffizient r .

Beispiel aus der Mechanik (Fortsetzung)

Beispiel

Differentialgleichung:

$$\dot{y}_a(t) = -\lambda y_a(t) + \lambda y_e(t), \quad \lambda = \frac{K}{r}$$

Lösung des Anfangswertproblems bei Vorgabe von $y_e(t)$, $t \geq t_0$:

$$y_a(t) = y_a(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} + \lambda \int_{t_0}^t y_e(\tau)e^{\lambda(\tau-t)} d\tau$$

Beispiel aus der Thermodynamik

Beispiel (Newtonsche Abkühlung)

Temperatur $T(t)$ eines homogenen Körpers (räumlich gemittelt):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k \cdot F}{c \cdot m} (T_a(t) - T(t))$$

wobei

$T_a(t)$ = Umgebungstemperatur

m = Masse des Körpers

F = Oberfläche

c = spezifische Wärme

k = Proportionalitätsfaktor

Beispiel aus der Thermodynamik (Fortsetzung)

Beispiel

Die **Differentialgleichung** ist identisch mit der des Regelkreisglieds!! Insbesondere gilt: $T(t) \rightarrow T_a(t)$ für $t \rightarrow \infty$

Beispiel aus der Elektrotechnik

Beispiel (Elektrischer Schwingkreis)

Gegeben seien:

R = Ohmscher Widerstand

L = Induktivität

C = Kapazität

Für die Spannungsabfälle gilt:

$$U_R = R \cdot I, \quad U_L = L \cdot \dot{I}, \quad I = C \cdot \dot{U}_C.$$

Beispiel aus der Elektrotechnik (Fortsetzung I)

Beispiel

Bei vorgegebener Spannung $U(t)$ ergibt sich:

$$U_R + U_L + U_C = U(t)$$

Ersetze in U_R und U_L die Variable I durch $C \cdot \dot{U}_C$:

$$R \cdot C \cdot \dot{U}_C + L \cdot C \cdot \ddot{U}_C + U_C = U(t)$$

$$LC \ddot{U}_C + RC \dot{U}_C + U_C = U(t)$$

Beispiel aus der Elektrotechnik (Fortsetzung II)

Beispiel

Typische Vorgabe: Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

Achtung: Anfangswertproblem mit Vorgabe von

$$U_C(t_0) = C_1 \quad \text{und} \quad \dot{U}_C(t_0) = C_2$$

Schreibe Differentialgleichung auch als **System erster Ordnung**:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{R}{L} y_2 - \frac{1}{LC} y_1 + \frac{1}{LC} U \end{aligned}$$

wobei $y_1 := U_C$ und $y_2 := \dot{U}_C$.

Richtungsfeld

Das **Richtungsfeld**: einer skalaren Differentialgleichung erster Ordnung: Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (y(t) \in \mathbb{R})$$

Betrachte an jedem Punkt $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ den Richtungsvektor $v = (1, y')^T$ in der Tangentenrichtung $y' = f(t, y)$ (Richtungsfeld).

Beispiel

Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = y$.

Definition

Ein Tripel $(t, y, y') \in \mathbb{R}^3$ welches die Gleichung $y' = f(t, y)$ erfüllt nennt man ein **Linienelement** der Differentialgleichung.

Lösungen

“Erraten” der Lösung aus einer Skizze des Richtungsfelds:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{t}{y}$$

Linienelemente der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{t}{y}$$

sind gegeben durch die Tripel $(t, y, -\frac{t}{y}) \in \mathbb{R}^3$.

Typ A: Separierbare Differentialgleichungen I

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t) \cdot g(y)$$

in einem Bereich D der (t, y) -Ebene. Gilt $g(y) \neq 0$, so lassen sich die Variablen t und y **trennen**:

$$\frac{y'(t)}{g(y)} = f(t).$$

Integration mittels Substitutionsregel:

$$\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

Richtungsvektor

Der Richtungsvektor v im Punkt (t, y) ist gegeben durch

$$v = (1, y')^T = \left(1, -\frac{t}{y}\right)^T$$

und es gilt

$$v \perp r = (t, y)^T \quad (\text{Ortsvektor})$$

Lösung sind (geometrisch gesehen) Kreise in der (t, y) -Ebene:

$$y(t) = \pm \sqrt{r^2 - t^2} \quad (-r < t < r)$$

Separierbare Differentialgleichungen II

Bezeichnen wir mit $H(y)$ eine Stammfunktion von $1/g(y)$, also

$$H(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$$

so folgt

$$H(y) = H(y_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

Da $g(y) \neq 0$, ist die Stammfunktion $H(y)$ injektiv und daher invertierbar:

$$y(t) = H^{-1} \left(H(y_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right), \quad H(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$$

Beispiel einer separierbaren Dgl

Beispiel

Betrachte die Gleichung $y' = -t/y$:

$$yy' = -t \Rightarrow \int_{y_0}^y \eta d\eta = - \int_{t_0}^t \tau d\tau.$$

Daraus folgt:

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = -\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) \Rightarrow y^2 + t^2 = y_0^2 + t_0^2 = r^2$$

Beispiel einer separierbaren Dgl (Fortsetzung)

Beispiel (Fortsetzung)

Unter Vorgabe einer Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0$$

erhalten wir die Lösungen in der Form

$$y^2 + t^2 = y_0^2 + t_0^2 = r^2$$

Dies sind gerade Kreise in der (t, y) -Ebene.

Typ B: Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Differentialgleichungen der Form

$$y'(t) = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

lassen sich durch die Substitution

$$u(t) := \frac{y(t)}{t}$$

auf separierbare Gleichungen zurückführen:

$$f(u) = y'(t) = (tu(t))' = u(t) + tu'(t).$$

Auflösung nach $u'(t)$ ergibt die separierbare Gleichung

$$u'(t) = \frac{f(u) - u}{t}.$$

Beispiel einer Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

Beispiel

Gesucht ist die Ortslinie aller Punkte, für die der Tangentenabschnitt auf der y -Achse gleich dem Abstand des Punktes vom Ursprung ist.

Beispiel (Fortsetzung)

Die zugehörige Differentialgleichung lautet:

$$y - ty' = \sqrt{t^2 + y^2} \Rightarrow y' = \frac{y}{t} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{t}\right)^2}$$

Substitution $u = y/t$ ergibt:

$$u' = -\frac{\sqrt{1+u^2}}{t}$$

Trennung der Variablen liefert zunächst:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dt}{t}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Aus der Beziehung (siehe Analysis II)

$$\operatorname{arcsinh}(u) = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$$

folgt

$$u = \sinh(-\ln|t| + C_1)$$

und damit durch Rücksubstitution

$$\frac{y}{t} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{C_1}}{t} - te^{-C_1} \right).$$

Beispiel (Fortsetzung)

Trennung der Variablen liefert zunächst:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dt}{t}$$

und damit

$$\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = -\ln|t| + C_1$$

Beispiel (Fortsetzung)

Wählt man $C = e^{C_1}$, so erhalten wir

$$2y = C - \frac{t^2}{C}$$

und es ergibt sich als Lösung die Parabelschar:

$$t^2 = C^2 - 2Cy, \quad C = e^{C_1}$$