$$A v = \lambda v \qquad \lambda \neq 0$$

λ Eigenwert

v Eigenvektor.

Suche Eigenwerte

$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$ charakt. Polynom.

$$\| \\ (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

EW ist einfach, falls λ_i nur einmal auftritt.

alg. einfach.

λ_i mehrfach auftritt

$\exists!\, v \quad A v = \lambda_i v$

geometr. einfach.

alg. einfach $\Rightarrow$ geom. einfach

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

allg. Lösung des homogenen Problems

$$y_h(t) = e^t \begin{pmatrix} c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \\ 2c_1 \sin(2t) - 2c_2 \cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$y' = A y$$

$$y_h'(t) = \begin{pmatrix} -2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t) \\ 4c_1 \cos(2t) + 4c_2 \sin(2t) \end{pmatrix} e^t + e^t \begin{pmatrix} c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \\ 2c_1 \sin(2t) - 2c_2 \cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$A\, y_h(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \\ 2c_1 \sin(2t) - 2c_2 \cos(2t) \end{pmatrix} e^t$$

$$= \begin{pmatrix} (c_1 + 2c_2) \cos(2t) + (c_2 - 2c_1) \sin(2t) \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Matrix A in Jordan Form

$$J = A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

$$J_\ell = \begin{pmatrix} \lambda_\ell & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_\ell \end{pmatrix}$$

$$y' = A y \iff$$

$$(y_k)' = J_\ell \, y_k$$

$$\frac{d}{dt}\, e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_i e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} \frac{t^{r-i}}{(r-i)!} \\ \vdots \\ \frac{t}{1!} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J = e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} = e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} \lambda_i \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} + \frac{t^i}{i!} \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zum EW λ sind

genau die Lösungen

$$(A - \lambda \mathbb{1}) v = 0$$

Hauptvektoren der Stufe 1 sind genau die Lösungen von

$$(A - \lambda \mathbb{1})(A - \lambda \mathbb{1}) v = 0$$

$$(A - \lambda \mathbb{1})^2 v = 0,$$ die nicht EV sind.

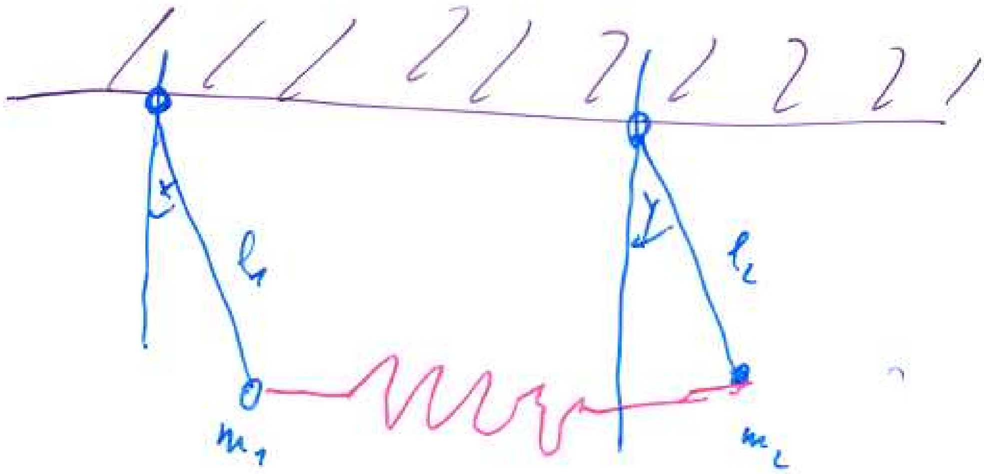
Algorithmus

$$(A - \lambda \mathbb{1}) v = 0$$

$$(A - \lambda \mathbb{1})^2 v = 0$$

$$\vdots$$

$$(A - \lambda \mathbb{1})^{k-1} v = 0$$



$l_1 = l_2 = l$

$m_1 = m_2 = m$

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}x - k(x-y)$$

k "Federkonst."

$$m\ddot{y} = -\frac{mg}{l}y - k(y-x)$$

$p = \dot{x}$

$q = \dot{y}$

Abkürzungen:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$k_0 = \frac{k}{m}$$

$$\dot{x} = p$$

$$\dot{y} = q$$

$$\dot{p} = -\omega_0^2 x - k_0(x-y)$$

$$\dot{q} = -\omega_0^2 y - k_0(y-x)$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_0^2 - k_0 & k_0 & 0 & 0 \\ k_0 & -\omega_0^2 - k_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ p \\ q \end{pmatrix}$$

4x4 autonom erster Ordnung

Eigenwerte

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_0^2 - k_0 & k_0 & 0 & 0 \\ k_0 & -\omega_0^2 - k_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \pm i\,\omega_0$

$$\lambda_{3/4} = \pm i \sqrt{\omega_0^2 + 2k_0}$$