1. Beispiel für Extrema mit Nebenbedingung
2. Newton Verfahren
3. Integration (Einstieg)

Ausblick auf die heutige Vorlesung

1. Integration (Fortsetzung)
2. Existenz von Integralen auf Quadern und allgemeineren Mengen
3. Satz von Fubini
4. Berechnung von Integralen
5. Volumina
6. Normalgebiete

Definition (Fortsetzung)

2) Die **Feinheit** einer Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}(D)$ ist gegeben durch

$$\|Z\| \;:=\; \max_{i,j} \{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$$

3) Für eine vorgegebene Zerlegung Z nennt man die Mengen

$$Q_{ij} \;:=\; [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die **Teilquader** der Zerlegung Z. Das **Volumen** des Teilquaders Q_{ij} ist

$$\mathrm{vol}(Q_{ij}) \;:=\; (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$$

Riemannsche Summe II

Definition (Fortsetzung)

4) Für beliebige Punkte $x_{ij} \in Q_{ij}$ der jeweiligen Teilquader nennt man

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(\mathbf{x}_{ij}) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

eine **Riemannsche Summe** zur Zerlegung Z.

Definition (Fortsetzung)

5) Analog zum Integral einer Variablen heißen

$$
\begin{aligned}
U_f(Z) &:= \sum_{i,j} \inf_{\mathbf{x}\in Q_{ij}} f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij}) \\
O_f(Z) &:= \sum_{i,j} \sup_{\mathbf{x}\in Q_{ij}} f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})
\end{aligned}
$$

die **Riemannsche Unter– bzw. Obersumme** der Funktion $f(\mathbf{x})$ zur Zerlegung Z.

Elementare Eigenschaften von Riemann Summen

Bemerkung

Eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z liegt stets zwischen der Unter– und Obersumme dieser Zerlegung, d.h.

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z).$$

Bemerkung

Ensteht eine Zerlegung Z_2 aus der Zerlegung Z_1 durch Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte x_i und/oder y_j, so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \qquad O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1).$$

Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt stets:

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2).$$

Was passiert mit den Unter– und Obersummen für $\|Z\| \to 0$:

$$\begin{aligned} U_f &:= \sup\{U_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}(D)\} \\ O_f &:= \inf\{O_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}(D)\} \end{aligned}$$

Ober- und Untersummen II

Bemerkung (Fortsetzung)

Die beiden Werte U_f und O_f existieren, da Unter– und Obersumme geeignete Monotonieeigenschaften besitzen.

Definition

1) **Riemannsches Unter– bzw. Oberintegral** der Funktion $f(\mathbf{x})$ über D:

$$\underset{D}{\underset{*}{\int}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \;:=\; \sup\{U_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}(D)\}$$

$$\overset{*}{\int_D} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \;:=\; \inf\{O_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}(D)\}$$

Ober- und Unterintegrale

Definition

2) Die Funktion $f(\mathbf{x})$ nennt man **Riemann–integrierbar** über D, falls Unter– und Oberintegral übereinstimmen. Das **Riemann–Integral** von $f(\mathbf{x})$ über D ist dann

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \underset{D}{\underset{*}{\int}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \overset{*}{\int_D} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Bemerkung

Wir haben bis jetzt den Fall von **zwei** *Variablen betrachtet:*

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad D \in \mathbb{R}^2.$$

In höheren Dimensionen $n > 2$ ist die Vorgehensweise analog.
Schreibweise *für $n = 2$ und $n = 3$:*

$$\int_D f(x,y)dxdy \qquad \int_D f(x,y,z)dxdydz$$

oder auch

$$\iint_D f(x,y)dxdy \qquad \iiint_D f(x,y,z)dxdydz.$$

Eigenschaften des Integrals

Satz

1) **Linearität**

$$\int_D (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \alpha \int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \beta \int_D g(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

2) **Monotonie**
Gilt $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$, so folgt:

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \int_D g(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Satz (Fortsetzung)

3) **Positivität**
Gilt für alle $\mathbf{x} \in D$ *die Beziehung* $f(\mathbf{x}) \geq 0$, *so folgt:*

$$\int\limits_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq 0.$$

4) **Additivität**
Sind D_1, D_2, D *Quader,* $D = D_1 \cup D_2$, $vol(D_1 \cap D_2) = 0$, *so ist* $f(\mathbf{x})$ *genau dann über* D *integrierbar, falls* $f(\mathbf{x})$ *über* D_1 *und* D_2 *integrierbar ist, und es gilt:*

$$\int\limits_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int\limits_{D_1} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int\limits_{D_2} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Eigenschaften des Integrals III

Satz (Fortsetzung)

5) *Es gilt folgende* **Abschätzung** *für das Integral*

$$\left| \int\limits_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \quad \leq \quad \sup_{\mathbf{x} \in D} |f(\mathbf{x})| \cdot vol(D)$$

6) **Riemannsches Kriterium:**
$f(\mathbf{x})$ *ist genau dann über* D *integrierbar, falls gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists Z \in \mathbf{Z}(D) \quad : \quad O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon.$$

Satz (Fubini)

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ integrierbar, $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ein Quader, und existieren die Integrale

$$F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy \qquad bzw. \qquad G(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx$$

für alle $x \in [a_1, b_1]$ bzw. alle $y \in [a_2, b_2]$, so gilt

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad = \quad \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dydx \quad = \quad \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dxdy$$

Was bringt der Satz von Fubini

Bemerkung

Dies ermöglicht eine Rückführung auf eindimensionale Integrale.

Beispiel

Gegeben sei der Quader $D = [0,1] \times [0,2]$ sowie die Funktion

$$f(x,y) = 2 - xy.$$

Stetige Funktionen sind über Quadern integrierbar (kommt gleich), daher können wir den Satz von Fubini anwenden:

$$\begin{aligned}
\int_d f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_0^2 \int_0^1 f(x,y) dx dy = \int_0^2 \left[2x - \frac{x^2 y}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_0^2 \left(2 - \frac{y}{2} \right) dy = \left[2y - \frac{y^2}{4} \right]_{y=0}^{y=2} = 3.
\end{aligned}$$

Bemerkung zum Satz von Fubini

Bemerkung

Der Satz von Fubini erfordert die Voraussetzung der Integrierbarkeit von $f(\mathbf{x})$. Die Existenz der beiden Integrale $F(x)$ und $G(y)$ alleine garantiert die Integrierbarkeit von $f(\mathbf{x})$ **nicht**!

Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt. Setze

$$f^*(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & : \text{ falls } \mathbf{x} \in D \\ 0 & : \text{ falls } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases} .$$

Für $f(\mathbf{x}) = 1$ heißt $f^*(\mathbf{x})$ die **charakteristische** Funktion von D. Diese wird mit $\mathcal{X}_D(\mathbf{x})$ bezeichnet. Sei Q der kleinste Quader mit $D \subset Q$. Definiere:

1) Die Funktion $f(\mathbf{x})$ heißt **integrierbar** über D, falls $f^*(\mathbf{x})$ über Q integrierbar ist. In diesem Fall setzen wir

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_Q f^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Volumina

Definition (Fortsetzung)

2) Eine kompakte Menge D heißt **messbar**, falls das Integral

$$\text{vol}(D) := \int_D 1 d\mathbf{x} = \int_Q \mathcal{X}_D(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

existiert. Man nennt dann $\text{vol}(D)$ das **Volumen** von D. Die Menge D heißt **Nullmenge**, falls D messbar ist und $\text{vol}(D) = 0$ gilt.

Bemerkung

Ist die Menge D selbst ein Quader, so folgt $Q = D$ und der Integrationsbegriff von oben stimmt mit dem vorhergehend diskutierten überein.
Das durch $vol(D)$ bezeichnete Volumen ist dann auch das tatsächliche Volumen des Quaders (im $\mathbb{R}^n$).

Eigenschaften des Integrals

Wir fassen drei wichtige Eigenschaften der mehrdimensionalen Integration zusammen:

Satz

1) *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist D genau dann messbar, falls der Rand ∂D von D eine Nullmenge ist.*
2) *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und messbar und sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(\mathbf{x})$ integrierbar über D.*
3) **Mittelwertsatz:**
   Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, zusammenhängend und messbar und ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es einen Punkt $\xi \in D$ mit

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f(\xi) \cdot vol(D).$$

Anschaulich ist es wohl klar, was der Begriff zusammenhängend meint. Eine formale Definition ist die nachfolgende.

Definition

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, wenn aus U, V disjunkt, offen und $D \subset U \cup V$ folgt, dass $D \subset U \vee D \subset V$.

Beweis der dritten Aussage

Beweis

Setze

$$A = \frac{1}{vol(D)} \int\limits_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Wegen der Stetigkeit von f sind die Mengen

$$U = \left\{ \mathbf{x} \in D \;\middle|\; f(\mathbf{x}) < A \right\}$$

und

$$V = \left\{ \mathbf{x} \in D \;\middle|\; f(\mathbf{x}) > A \right\}$$

offen, disjunkt und überdecken, wenn kein solches ξ existiert, die Menge D. Dann ist $D \subset U \vee D \subset V$ und daher (im ersten Fall)

$$\int\limits_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < A \int\limits_D 1 d\mathbf{x} = \int\limits_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Definition

1) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt ein **Normalbereich**, falls es stetige Funktionen g, h bzw. $\bar{g}, \bar{h}$ gibt mit
$$D = \{(x,y) \ : \ a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq h(x)\}$$
bzw.
$$D = \{(x,y) \ : \ \bar{a} \leq y \leq \bar{b} \wedge \bar{g}(y) \leq x \leq \bar{h}(y)\}.$$
2) Analog heißt $D \subset \mathbb{R}^3$ **Normalbereich**, falls es eine Darstellung
$$\begin{aligned} D \quad = \quad \{ \ (x_1, x_2, x_3) \ : \ a \leq x_i \leq b \quad \wedge \quad g(x_i) \leq x_j \leq h(x_i) \\ \wedge \quad \varphi(x_i, x_j) \leq x_k \leq \psi(x_i, x_j) \ \} \end{aligned}$$
gibt mit einer Permutation (i, j, k) von $(1, 2, 3)$ und stetigen Funktionen g, h, φ und ψ.

Projizierbare Mengen

Definition (Fortsetzung)

3) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **projizierbar** in Richtung x_i, $i \in \{1, \ldots .n\}$, falls es eine messbare Menge $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und stetige Funktionen $\varphi, \psi : B \to \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$\begin{aligned} D = \{ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \tilde{\mathbf{x}} \quad = \quad (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)^T \in B \\ \wedge \ \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) \leq x_i \leq \psi(\tilde{\mathbf{x}}) \ \}. \end{aligned}$$