Ausblick auf die heutige Vorlesung

1. Beispiel für Extrema mit Nebenbedingung
2. Newton Verfahren

Ein Beispiel auf der zweidimensionalen Sphäre

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f(x, y, z) = xyz$ auf der Sphäre

$$S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Wir erhalten als notwendige Bedingung für Extrema

$$\begin{aligned} yz &= \lambda x \\ xz &= \lambda y \\ xz &= \lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Ein Beispiel auf der zweidimensionalen Sphäre II

Beispiel (Fortsetzung)

Ist $x = 0$, so folgt $y = 0$ oder $z = 0$. Aus $y = 0$ folgt $z = \pm 1$. Ebenso finden wir die Punkte $y = z = 0$ mit $x = \pm 1$ und $y = \pm 1, x = 0, y = 0$. Sind alle Variablen $x, y, z \neq 0$ so multiplizieren wir die erste Gleichung mit x, die zweite mit y, die dritte mit z und erhalten

$$3xyz = \lambda(x^2 + y^2 + z^2),$$

also $3xyz = \lambda$.

Differentialrechnung
Anwendung
Newton-Verfahren
Integralrechnung

Ein Beispiel auf der zweidimensionalen Sphäre III

Beispiel (Fortsetzung)

Die erste Gleichung ergibt nun

$$yz = 3x^2 yz, \text{ also } 1 = 3x^2$$

und ebenso

$$1 = 3y^2 = 3z^2.$$

Als Lösung erhält man $x = \pm y = \pm z = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. Aus der Ungeradheit der Funktion schließt man auf die Existenz von 4 Minima und 4 Maxima mit jeweils

$$f(x, y, z) = \pm\sqrt{\frac{1}{27}}.$$

Reiner Lauterbach Analysis III

Ein Beispiel auf der zweidimensionalen Sphäre IV

Beispiel (Fortsetzung)

Damit sind noch 6 Punkte zu untersuchen, wir beschränken uns auf einen, nämlich $x = 1, y = z = 0$. Der Tangentialraum an die Nebenbedingung wird aufgespannt von den Vektoren

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Hessesche von f in diesem Punkt hat die Form

$$\mathbf{H}f((1,0,0)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein Beispiel auf der zweidimensionalen Sphäre V

Beispiel (Fortsetzung)

Nun ergibt sich

$$y_1^T \mathbf{H}f((1,0,0)^T)y_1 = -2$$

und

$$y_2^T \mathbf{H}f((1,0,0)^T)y_2 = 2.$$

Also handelt es sich um einen Sattel auf der durch die Nebenbedingung beschriebenen Menge. Für die anderen fünf Punkte ergibt sich die gleiche Betrachtung.

Newton–Verfahren

Problem: Wir suchen die Nullstellen einer Funktion $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Wir kennen bereits die **Fixpunktiteration**

$$\mathbf{x}^{k+1} := \Phi(\mathbf{x}^k)$$

mit Startwert $\mathbf{x}^0$ und Iterationsvorschrift $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Konvergenzaussagen liefert der **Banachsche Fixpunktsatz**.
Vorteil: Verfahren ist **ableitungsfrei**.
Nachteile:

- Numerisches Verfahren konvergiert langsam (linear),
- Keine eindeutige Iterationsvorschrift.

Differentialrechnung
Anwendung
Newton-Verfahren
Integralrechnung

Alternative: Newton–Verfahren für vektorwertige Funktionen

Gegeben sei eine $\mathcal{C}^1$–Funktion $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir suchen eine Nullstelle, d.h ein $\mathbf{x}^* \in D$ mit

$$f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

Die Taylor–Entwicklung von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ um einen Startwert $\mathbf{x}^0$ lautet

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^0) + \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{o}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|)$$

Setzen wir $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, so folgt

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \approx -\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$$

Eine Näherungslösung für $\mathbf{x}^*$ ist dann $\mathbf{x}^1$, die Lösung des LGS

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^0).$$

Newton–Verfahren

Das **Newton–Verfahren** lautet somit

$$\text{für} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k) \cdot \Delta\mathbf{x}^k = -f(\mathbf{x}^k)$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta\mathbf{x}^k$$

Man muss also im Newton–Verfahren in jedem Iterationsschritt ein LGS lösen. Die Lösung $\Delta\mathbf{x}^k$ heißt **Newton–Korrektur**.
Das Newton–Verfahren ist **skalierungsinvariant**:

Skalierungsinvarianz

Satz

Das Newton–Verfahren ist invariant unter allen Transformationen (Skalierungen) der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{Af}(\mathbf{x})$$

mit einer regulären Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$*,d.h. die Iterierten für* $\mathbf{f}$ *und* $\mathbf{g}$ *sind identisch.*

Konvergenz des Newton Verfahrens

Satz

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ *eine* $\mathcal{C}^1$*–Funktion,* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen und konvex. Sei* $\mathbf{x}^* \in D$ *mit* $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$*. Die Jacobi–Matrix* $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$ *sei regulär für* $\mathbf{x} \in D$*, und es gelte eine Lipschitz–Bedingung*

$$\|(\mathbf{Jf}(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{Jf}(\mathbf{y}) - \mathbf{Jf}(\mathbf{x}))\| \leq L\|\mathbf{y} - \mathbf{y}\|$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ *mit* $L > 0$*. Für alle Startwerte* $\mathbf{x}^0 \in D$ *mit*

$$\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\| < \frac{2}{L} = r \quad \textit{und} \quad K_r(\mathbf{x}^*) \subset D$$

ist dann das Newton–Verfahren wohldefiniert mit $\mathbf{x}^k \in K_r(\mathbf{x}^*)$*,* $k = 0, 1, 2, \ldots$*, und die Newton–Iterierten* $\mathbf{x}^k$ *konvergieren* **quadratisch** *gegen* $\mathbf{x}^*$*:*

Differentialrechnung
Anwendung
Newton-Verfahren
Integralrechnung

Konvergenz des Newton Verfahrens II

Satz (Fortsetzung)

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \ \leq \ \frac{L}{2} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2$$

Ferner ist $\mathbf{x}^*$ *die einzige Nullstelle von* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *innerhalb* $K_r(\mathbf{x}^*)$*.*

Reiner Lauterbach Analysis III

Das gedämpfte Newton–Verfahren

Das Newton–Verfahren konvergiert quadratisch, aber nur **lokal**. **Globale** Konvergenz kann durch einen sogenannten Dämpfungsterm verbessert werden:

$$\text{für} \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k) \cdot \Delta\mathbf{x}^k = -f(\mathbf{x}^k)$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda_k \Delta\mathbf{x}^k$$

Gedämpfte Newton–Verfahren mit **Dämpfungsparameter** $\lambda_k \in (0, 1]$.
Frage: Wie wählt man die Dämpfungsfaktoren λ_k?

Das gedämpfte Newton–Verfahren II

Verwende eine **Testfunktion** $T(\mathbf{x})$ mit

$$T(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

$$T(\mathbf{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

sodass die Folge $T(\mathbf{x}^k)$ monoton fällt.

Gedämftes Newton Verfahren

Bemerkung

Befindet man sich beim gedämpften Newton–Verfahren in der Nähe der gesuchten Lösung $\mathbf{x}^*$, so sollte $\lambda_k = 1$ gewählt werden. Nur das sichert die (lokale) quadratische Konvergenz.

Beispiel

Bei praktischen Anwendungen verwendet man häufig eine Testfunktion der Form

$$T(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2^2$$

Für diesen Fall gilt der folgende Satz.

Differentialrechnung
Anwendung
Newton-Verfahren
Integralrechnung

Gedämftes Newton Verfahren II

Satz

Sei $\mathbf{f}$ eine $\mathcal{C}^1$–Funktion auf der offenen und konvexen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Für $\mathbf{x}^k \in D$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \neq \mathbf{0}$ gilt dann:

$$\exists\, \mu_k \ : \ \forall\, \lambda \in (0, \mu_k) \ : \ \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k + \lambda \Delta x^k)\|_2^2 < \|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\|_2^2$$

Reiner Lauterbach Analysis III

Dämpfungsstrategie I

$k = 0$: Man wähle $\lambda_0 \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \lambda_{min}\}$ möglichst groß,

so dass gilt:

$$T(\mathbf{x}^0 + \lambda_0 \Delta \mathbf{x}^0) < T(\mathbf{x}^0)$$

$k > 0$: $\lambda_k := \lambda_{k-1}$

falls $T(\mathbf{x}^k + \lambda_k \Delta \mathbf{x}^k) < T(\mathbf{x}^k)$:

$$\mathbf{x}^{k+1} := \mathbf{x}^k + \lambda_k \Delta \mathbf{x}^k$$

$$\lambda_k := \begin{cases} \lambda_k & : \text{ falls } \lambda_k = 1 \\ 2\lambda_k & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Differentialrechnung
Anwendung
Newton-Verfahren
Integralrechnung

Dämpfungsstrategie II

sonst:

$$\mu = \max \left\{ \frac{\lambda_k}{2}, \frac{\lambda_k}{4}, \dots, \lambda_{min} \right\}$$

so dass $T(\mathbf{x}^k + \mu \Delta \mathbf{x}^k) < T(\mathbf{x}^k)$

$$\lambda_k := \mu$$

Reiner Lauterbach Analysis III

Monotonietest

Bemerkung

Die Testfunktion ist **nicht** *skalierungsinvariant.*
Daher ist der sogenannte **natürliche Monotonietest** *sinnvoll:*

$$\|\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1})\| \;<\; \|\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\|$$

Es gilt dabei:

$$\|\Delta\mathbf{x}^k\| \;=\; \|\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^k)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)\|$$

Erinnerung Volumina

Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^n$.

Ziel: Berechnung des Volumens unterhalb des Graphen von $f(\mathbf{x})$:

$$V = \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Erinnerung Analysis II:
Riemann–Integral einer Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Ober- und Untersummen

Das Integral war als Grenzwert von Ober– und Untersumme, für den Fall, dass die Feinheit der Zerlegung gegen Null strebt und ein gemeinsamer Grenzwert existiert, definiert.

Konstruktion des Integrals

Konstruktionsprinzip des Integrals mehrerer Veränderlichen analog,
aber der Definitionsbereich D ist komplizierter.
Zunächst betrachten wir $n = 2$ und einen Definitionsbereich D der Form

$$D = [a_1, b - 1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$$

d.h. D ist ein kompakter Quader (Rechteck).
Weiter sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Zerlegung

Definition

1) Man nennt $Z = \{(x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_m)\}$ eine Zerlegung des Quaders $D = [a_1, b - 1] \times [a_2, b_2]$, falls gelten

$$a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b_1$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b_2$$

Mit $\mathbf{Z}(D)$ wird die **Menge der Zerlegungen** von D bezeichnet.

Differentialrechnung
Anwendung
Newton-Verfahren
Integralrechnung
Bereichsintegrale
Kurvenintegrale
Oberflächenintegrale

Riemannsche Summe

Definition (Fortsetzung)

2) Die **Feinheit** einer Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}(D)$ ist gegeben durch

$$\|Z\| \;:=\; \max_{i,j} \{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$$

1

3) Für eine vorgegebene Zerlegung Z nennt man die Mengen

$$Q_{ij} \;:=\; [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die **Teilquader** der Zerlegung Z. Das **Volumen** des Teilquaders Q_{ij} ist

$$\mathrm{vol}(Q_{ij}) \;:=\; (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$$

Reiner Lauterbach Analysis III

Unter– und Obersummen

Definition (Fortsetzung)

5) Analog zum Integral einer Variablen heißen

$$U_f(Z) := \sum_{i,j} \inf_{\mathbf{x}\in Q_{ij}} f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

$$O_f(Z) := \sum_{i,j} \sup_{\mathbf{x}\in Q_{ij}} f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

die **Riemannnsche Unter– bzw. Obersumme** der Funktion $f(\mathbf{x})$ zur Zerlegung Z.

Elementare Eigenschaften von Riemann Summen

Bemerkung

Eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z liegt stets zwischen der Unter– und Obersumme dieser Zerlegung, d.h.

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

Bemerkung:
Ensteht eine Zerlegung Z_2 aus der Zerlegung Z_1 durch Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte x_i und/oder y_j, so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \qquad O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt stets:

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

Was passiert mit den Unter– und Obersummen im Grenzwert $\|Z\| \to 0$:

$$\begin{aligned} U_f &:= \sup\{U_f(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}(D)\} \\ O_f &:= \inf\{O_f(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}(D)\} \end{aligned}$$

Die beiden Werte U_f und O_f existieren, da Unter– und Obersumme geeignete Monotonieeigenschaften besitzen.

Definition:

1) **Riemannsches Unter– bzw. Oberintegral** der Funktion $f(\mathbf{x})$ über D:

$$\begin{aligned} \int_{\overset{*}{D}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} &:= \sup\{U_f(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}(D)\} \\ \int_D^{*} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} &:= \inf\{O_f(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}(D)\} \end{aligned}$$

2) Die Funktion $f(\mathbf{x})$ nennt man **Riemann–integrierbar** über D, falls Unter– und Oberintegral übereinstimmen. Das **Riemann–Integral** von $f(\mathbf{x})$ über D ist dann

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \int_{*} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_D^{*} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$