Rückblick auf die letzte Vorlesung

1. Anwendungen des Satzes über implizite Funktionen
2. Stationäre Punkte implizit definierter Funktionen
3. Reguläre Punkte
4. Singuläre Punkte

Ausblick auf die heutige Vorlesung

1. Extrema unter Nebenbedingungen
2. Lagrange Multiplikatoren
3. Lagrange Funktion

Nebenbedingungen

Frage:
Welche Abmessungen sollte eine Metalldose haben, damit bei vorgegebenem Volumen der Materialverbrauch am geringsten ist?
Sei r der Radius und h die Höhe. Dann gilt

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ O &= 2\pi r^2 + 2\pi rh. \end{aligned}$$

Setze bei vorgebenem $c \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2\pi x^2 + 2\pi xy \\ g(x,y) &= \pi x^2 y - c = 0 \end{aligned}$$

Nebenbedingungen II

Bestimme das Minimum der Funktion $f(x,y)$ auf der Menge

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \, : \, g(x,y) = 0\}$$

Lösung

Aus $g(x,y) = \pi x^2 y - c = 0$ folgt

$$y = \frac{c}{\pi x^2}.$$

Einsetzen in $f(x,y)$ ergibt

$$h(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{c}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2c}{x}.$$

Bestimme das Minimum der Funktion $h(x)$:

$$h'(x) = 4\pi x - \frac{2c}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi x = \frac{2c}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{c}{2\pi}\right)^{1/3}$$

Hinreichende Bedingung

$$h''(x) = 4\pi + \frac{4c}{x^3} \quad \Rightarrow \quad h''\left(\left(\frac{c}{\pi}\right)^{1/3}\right) = 12\pi > 0$$

Extremwerte

Allgemein:
Bestimme die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$$

wobei $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Die Nebenbedingungen lauten also

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Extremwerte II

Alternativ: Bestimme die Extremwerte der Funktion $f(\mathbf{x})$ auf der Menge

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;:\; \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

Die Lagrange–Funktion

Wir definieren folgende erweiterte Funktion $F(\mathbf{x})$:

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

und suchen die Extremwerte von $F(\mathbf{x})$ für festes $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T$. Die Zahlen λ_i, $i = 1, \ldots, m$ nennt man **Lagrange–Multiplikatoren**.

Die Lagrange–Funktion II

Satz (Lagrange–Lemma)

Minimiert (bzw. maximiert) $\mathbf{x}^0$ *die Lagrange–Funktion* $F(\mathbf{x})$ *(für ein festes* λ*) über* D *und gilt* $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = 0$*, so liefert* $\mathbf{x}^0$ *zugleich das Minimum (bzw. Maximum) von* $f(\mathbf{x})$ *über*
$G := \{\mathbf{x} \in D \,:\, \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$.

Beweis.

Für ein beliebiges $\mathbf{x} \in D$ gilt nach Vorausetzung

$$f(\mathbf{x}^0) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Wählt man speziell $\mathbf{x} \in G$, so ist $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, also auch $f(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x})$. $\square$

Notwendige Bedingungen

Bemerkung

Sind f *und* g_i*,* $i = 1, \ldots, m$*,* $\mathcal{C}^1$*–Funktionen, so ist eine notwendige Bedingung für eine Extremstelle* $\mathbf{x}^0$ *von* $F(\mathbf{x})$ *gegeben durch*

$$grad\, f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i grad\, g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Zusammen mit den Nebenbedinungen $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ *ergibt sich ein (nichtlineares) Gleichungssystem mit* $(n + m)$ *Gleichungen und* $(n + m)$ *Unbekannten* $\mathbf{x}$ *und* λ*.*

Die Lösungen $(\mathbf{x}^0, \lambda^0)$ sind die Kandidaten für die gesuchten Extremstellen (**Notwendige Bedingung**).

Notwendige Bedingungen II

Alternativ: Definiere eine Langrange–Funktion

$$G(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

und suche die Extremstellen von $G(\mathbf{x}, \lambda)$ bezüglich **x und** λ.

Hinreichende Bedingungen

Bemerkung

Man kann auch eine **hinreichende** *Bedingung aufstellen:*
Sind die Funktionen f und $\mathbf{g}$ sogar $\mathcal{C}^2$–Funktionen und ist die Hesse–Matrix $\mathbf{H}F(\mathbf{x}^0)$ der Lagrange–Funktion positiv (bzw. negativ) definit, so ist $\mathbf{x}^0$ tatsächlich ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum) von $f(\mathbf{x})$ auf G.

In den meisten Anwendungen ist die hinreichende Bedingung allerdings **nicht** erfüllt, obwohl $\mathbf{x}^0$ ein strenges lokales Extremum **ist**.
Insbesondere kann man aus der Indefinitheit der Hesse–Matrix $\mathbf{H}F(\mathbf{x}^0)$ **nicht** schließen, dass $\mathbf{x}^0$ kein Extremwert ist.

Hinreichende Bedingungen II

Ähnlich problematisch ist die hinreichende Bedingung, die man aus der Hesse–Matrix für die Lagrange–Funktion $G(\mathbf{x}, \lambda)$ bezüglich **x und** λ erhält.

Ein Beispiel

Beispiel

Gesucht seien die Extrema von $f(x, y) = xy$ auf der Kreisscheibe

$$K := \{(x, y)^T \, : \, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Da die betrachte Funktion stetig ist und $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, folgt aus der Min–Max–Eigenschaft die Existenz von globalen Maxima und Minima auf K. Wir betrachten zunächst das Innere K^0 von K, also

$$K^0 := \{(x, y)^T \, : \, x^2 + y^2 < 1\}$$

Ein Beispiel II

Beispiel (Fortsetzung)

Dies ist eine offene Menge und die notwendige Bedingung für einen Extremwert lautet

$$\operatorname{grad} f = (y, x) = \mathbf{0}$$

Also erhalten wir als Kandidaten den Ursprung $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$.

Ein Beispiel III

Beispiel (Fortsetzung)

Die Hesse–Matrix im Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ lautet

$$\mathbf{H}f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und ist **indefinit**. Daher ist $\mathbf{x}^0$ ein **Sattelpunkt**.Die Extrema der Funktion müssen also auf dem Rand liegen, der eine Gleichungsnebenbedingung darstellt:

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Wir suchen also die Extremwerte von $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

Ein Beispiel IV

Beispiel (Fortsetzung)

Die Lagrange–Funktion lautet

$$F(x, y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Ein Beispiel V

Beispiel (Fortsetzung)

Damit ergibt sich das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y + 2\lambda x &= 0 \\ x + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

mit den vier Lösungen

Ein Beispiel VI

Beispiel (Fortsetzung)

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad : \quad \mathbf{x}^{(1)} = (\sqrt{0.5}, -\sqrt{0.5})^T \quad \mathbf{x}^{(2)} = (-\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})^T$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \quad : \quad \mathbf{x}^{(3)} = (\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})^T \quad \mathbf{x}^{(4)} = (-\sqrt{0.5}, -\sqrt{0.5})^T$$

Minima und Maxima lassen sich nun einfach aus den Funktionswerten ablesen

$$f(\mathbf{x}^{(1)}) = f(\mathbf{x}^{(2)}) = -0.5 \qquad f(\mathbf{x}^{(3)}) = f(\mathbf{x}^{(4)}) = 0.5$$

d.h. Minima sind $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$, Maxima $\mathbf{x}^{(3)}$ und $\mathbf{x}^{(4)}$.

Lagrange–Multiplikatoren

Satz (Lagrange–Multiplikatoren–Regel)

Seien $f, g_1, \ldots, g_m : D \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$–Funktionen, sei $\mathbf{x}^0 \in D$ ein lokales Extremum von $f(\mathbf{x})$ unter der Nebenbedingung $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Es gelte die **Regularitätsbedingung**

$$Rang\left(\mathbf{J}\,\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)\right) = m$$

Dann existieren Lagrange–Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, so dass für die Lagrange Funktion

$$F(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

die folgende **notwendige Bedingung erster Ordnung** *gilt:*

$$grad\, F(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$$

Notwendige Bedingung 2. Ordnung

Bemerkung

1) *Ist* $\mathbf{x}^0 \in D$ *ein lokales Minimum von* $f(\mathbf{x})$ *unter der Nebenbedingung* $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$*,ist die Regularitätsbedingung erfüllt und sind* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *zugehörige Lagrange–Multiplikatoren, so ist die Hesse–Matrix* $\mathbf{H}F(\mathbf{x}^0)$ *der Lagrange–Funktion positiv semidefinit auf dem Tangentialraum*

$$TG(\mathbf{x}^0) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathit{grad}\, g_i(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{y} = 0,\ i = 1, \dots, m\}$$

d.h., es gilt

$$\mathbf{y}^T\ \mathbf{H}F(\mathbf{x}^0)\ \mathbf{y} \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{y} \in TG(\mathbf{x}^0)$$

Hinreichende Bedingung 2. Ordnung

Bemerkung (Fortsetzung)

2) *Ist für einen Punkt* $\mathbf{x}^0 \in G$ *die Regularitätsbedingung erfüllt, existieren Lagrange–Multiplikatoren* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$*, so dass* $\mathbf{x}^0$ *ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange–Funktion ist, und ist die Hesse–Matrix* $\mathbf{H}F(\mathbf{x}^0)$ *positiv definit auf dem Tangentialraum* $TG(\mathbf{x}^0)$*, d.h., gilt*

$$\mathbf{y}^T\ \mathbf{H}F(\mathbf{x}^0)\ \mathbf{y} > 0 \quad \forall\, \mathbf{y} \in TG(\mathbf{x}^0),$$

so ist $\mathbf{x}^0$ *ein strenges lokales Minimum von* $f(\mathbf{x})$ *unter der Nebenbedingung* $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Globales Maximum mit Nebenbedingung

Beispiel

Man bestimme das globale Maximum der Funktion

$$f(x,y) = -x^2 + 8x - y^2 + 9$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Die Lagrange–Funktion ist

$$F(x) = -x^2 + 8x - y^2 + 9 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Die notwendige Bedingung ergibt das nichtlineare System

$$\begin{aligned} -2x + 8 &= -2\lambda x \\ -2y &= -2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Globales Maximum mit Nebenbedingung

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} -2x + 8 &= -2\lambda x \\ -2y &= -2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq 1$. Verwendet man dies in der zweiten Gleichung, so gilt $y = 0$. Aus der dritten Gleichung erkennt man sofort $x = \pm 1$.
Demnach sind die beiden Punkte $(x,y) = (1,0)$ und $(x,y) = (-1,0)$ Kandidaten für das globale Maximum.

Globales Maximum mit Nebenbedingung

Beispiel (Fortsetzung)

Wegen

$$f(1,0) = 16 \qquad f(-1,0) = 0$$

liegt das globale Maximum von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ im Punkt $(x,y) = (1,0)$.

Lokale Extrema

Beispiel

Man bestimme die lokalen Extremwerte der Funktion

$$f(x,y,z) = 2x + 3y + 2z$$

auf dem Durchschnitt des Zylinders

$$Z = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 2\}$$

mit der Ebene

$$E := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + z = 1\}$$

Lokale Extrema II

Beispiel (Fortsetzung)

Umformulierung: Bestimme die Extremwerte der Funktion $f(x, y, z)$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &:= x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ g_2(x, y, z) &:= x + z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Lokale Extrema III

Beispiel (Fortsetzung)

Die Jacobi–Matrix

$$\mathbf{Jg}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat den Rang 2, d.h. wir können über die Lagrange–Funktion Extremwerte bestimmen:

$$F(x, y, z) = 2x + 3y + 2z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1)$$

Die notwendige Bedingung ergibt das nichtlineare Gleichungssystem

Lokale Extrema IV

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}
2 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 &= 0 \\
3 + 2\lambda_1 y &= 0 \\
2 + \lambda_2 &= 0 \\
x^2 + y^2 &= 2 \\
x + z &= 1
\end{aligned}$$

Lokale Extrema V

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}
2 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 &= 0 \\
3 + 2\lambda_1 y &= 0 \\
2 + \lambda_2 &= 0 \\
x^2 + y^2 &= 2 \\
x + z &= 1
\end{aligned}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt

$$2\lambda_1 x = 0$$

Lokale Extrema VI

Beispiel (Fortsetzung)

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda_1 \neq 0$, also $x = 0$.
Damit ergeben sich die möglichen Extremwerte als

$$(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1) \quad (x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1)$$

Lokale Extrema VII

Beispiel (Fortsetzung)

Die möglichen Extremwerte sind also

$$(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1) \quad (x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1)$$

Man berechnet nun die zugehörigen Funktionswerte

$$\begin{aligned} f(0, \sqrt{2}, 1) &= 3\sqrt{2} + 2 \\ f(0, -\sqrt{2}, 1) &= -3\sqrt{2} + 2 \end{aligned}$$

Daher liegt im Punkt $(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1)$ ein Maximum, im Punkt $(x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1)$ ein Minimum.