1. Extrema (Wiederholung)
2. Hinreichende und notwendige Bedingungen
3. Eigenwerte der Hesse-Matrix
4. Lokale Auflösbarkeit
5. Satz über implizite Funktionen

## Ausblick auf die heutige Vorlesung

1. Anwendungen des Satzes über implizite Funktionen
2. Stationäre Punkte implizit definierter Funktionen
3. Reguläre Punkte
4. Singuläre Punkte

Beispiel

1) Für die Kreisgleichung $g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad r > 0$
findet man im Punkt $(x^0, y^0) = (0, r)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, r) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, r) = 2r \neq 0.$$

Man kann also in einer Umgebung von $(0, r)$ die Kreisgleichung nach $y$ auflösen:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Die Ableitung $f'(x)$ kann man durch **implizite Diffentiation** berechnen:

# Anwendungen des Satzes über implizite Funktionen II

Beispiel (Fortsetzung)

1)

$$g(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g_x(x, y) + g_y(x, y)y'(x) = 0$$

Also

$$2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) = -\frac{x}{y}$$

### Beispiel (Fortsetzung)

2) Betrachte die Gleichung

$$g(x, y) = e^{y-x} + 3y + x^2 - 1 = 0$$

Es gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = e^{y-x} + 3 > 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Die Gleichung ist also für jedes $x \in \mathbb{R}$ nach $y =: f(x)$ auflösbar und $f(x)$ ist eine stetig differenzierbare Funktion.
Implizite Differentiation:

$$e^{y-x}(y' - 1) + 3y' + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{e^{y-x} - 2x}{e^{y-x} + 3}$$

Eine **explizite** Auflösung nach $y$ ist in diesem Fall nicht möglich!

## Stationäre Punkte implizit definierter Funktionen

### Bemerkung

*Implizites Differenzieren einer durch*

$$g(x, y) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$$

*implizit definierten Funktion $y = f(x)$, $x, y \in \mathbb{R}$ ergibt:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{g_x}{g_y} \\ f''(x) &= -\frac{g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x^2}{g_y^3} \end{aligned}$$

### Bemerkung (Fortsetzung)

*Daher ist der Punkt $x^0$ ein stationärer Punkt von $f(x)$, falls gilt:*

$$g(x^0, y^0) = g_x(x^0, y^0) = 0 \quad \textit{und} \quad g_y(x^0, y^0) \neq 0$$

*Weiter ist $x^0$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum), falls*

$$\frac{g_{xx}(x^0, y^0)}{g_y(x^0, y^0)} > 0 \qquad \left( \textit{bzw. } \frac{g_{xx}(x^0, y^0)}{g_y(x^0, y^0)} < 0 \right)$$

## Implizite Darstellung ebener Kurven

Betrachte die Lösungsmenge einer skalaren Gleichungen

$$g(x, y) = 0$$

Gilt

$$\operatorname{grad} g = (g_x, g_y)^T \neq \mathbf{0}$$

So definiert $g(x, y)$ lokal eine Funktion $y = f(x)$ oder $x = \bar{f}(y)$.

### Definition

1) Ein Lösungspunkt $(x^0, y^0)$ der Gleichung $g(x, y) = 0$ mit $\operatorname{grad} g(x^0, y^0) \neq \mathbf{0}$ heißt **regulärer** Punkt.
1) Ein Lösungspunkt $(x^0, y^0)$ der Gleichung $g(x, y) = 0$ mit $\operatorname{grad} g(x^0, y^0) = \mathbf{0}$ heißt **singulärer** Punkt.

**Lemma**

1) *Gilt für einen regulären Punkt* $(x^0, y^0)$

$$g_x(\mathbf{x}^0) = 0, \quad g_y(\mathbf{x}^0) \neq 0$$

*so besitzt die Lösungskurve eine* **horizontale Tangente** *in* $\mathbf{x}^0$.

2) *Gilt für einen regulären Punkt* $(x^0, y^0)$

$$g_x(\mathbf{x}^0) \neq 0, \quad g_y(\mathbf{x}^0) = 0$$

*so besitzt die Lösungskurve eine* **vertikale Tangente** *in* $\mathbf{x}^0$.

## Singuläre Punkte

**Lemma**

3) *Ist* $\mathbf{x}^0$ *ein* **singulärer Punkt** *so wird die Lösungsmenge bei* $\mathbf{x}^0$ *durch die Lösungsmenge der folgenden* **quadratischen Gleichung** *approximiert:*

$$g_{xx}(\mathbf{x}^0)(x-x^0)^2 + 2g_{xy}(\mathbf{x}^0)(x-x^0)(y-y^0) + g_{yy}(\mathbf{x}^0)(y-y^0)^2 = 0.$$

### Bemerkung

*Wegen 3) erhält man für* $(g_{xx}, g_{xy}, g_{yy}) \neq \mathbf{0}^T$*:*

$det\, \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) > 0$ : $\mathbf{x}^0$ *ist ein* **isolierter Punkt** *der Lösungsmenge*

$det\, \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) < 0$ : $\mathbf{x}^0$ *ist ein* **Doppelpunkt**

$det\, \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) = 0$ : $\mathbf{x}^0$ *ist ein* **Rückkehrpunkt** *oder auch* **Spitze**

**Interpretation:**

1) Gilt $\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) > 0$, so sind beide Eigenwerte von $\mathbf{H}g(\mathbf{x}^0)$ entweder strikt positiv oder strikt negativ, d.h. $\mathbf{x}^0$ ist ein strenges lokales **Minimum** oder **Maximum** von $g(\mathbf{x})$.

## Singuläre Punkte III

2) Gilt $\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) < 0$, so haben die beiden Eigenwerte von $\mathbf{H}g(\mathbf{x}^0)$ ein unterschiedliches Vorzeichen, d.h. $\mathbf{x}^0$ ist ein **Sattelpunkt** von $g(\mathbf{x})$.
3) Gilt $\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) = 0$, so ist der stationäre Punkt $\mathbf{x}^0$ von $g(\mathbf{x})$ **ausgeartet**.

Beispiel

Wir betrachten jeweils den singulären Punkt $\mathbf{x}^0 = 0$:

1) Gegeben sei die implizite Gleichung

$$g(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x-2) = 0.$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$\begin{aligned} g_x &= y^2 + 3x^2 - 4x \\ g_y &= 2y(x-1) \\ g_{xx} &= 6x - 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g_{xy} &= 2y \\ g_{yy} &= 2(x-1) \\ \mathbf{H}g(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Stationäre Punkte implizit definierter Funktionen II

Beispiel (Fortsetzung)

1)

$$\mathbf{H}g(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ein isolierter Punkt.

Beispiel (Fortsetzung)

2) Gegeben sei die implizite Gleichung

$$g(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x+q^2) = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$\begin{aligned} g_x &= y^2 + 3x^2 + 2xq^2 & g_{xy} &= 2y \\ g_y &= 2y(x-1) & g_{yy} &= 2(x-1) \\ g_{xx} &= 6x + 2q^2 & \mathbf{H}g(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} 2q^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Stationäre Punkte implizit definierter Funktionen IV

Beispiel (Fortsetzung)

2)

$$\mathbf{H}g(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 2q^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ für $q \neq 0$ ein Doppelpunkt.

Beispiel (Fortsetzung)

3) Gegeben sei die implizite Gleichung

$$g(x, y) = y^2(x-1) + x^3 = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$\begin{aligned} g_x &= y^2 + 3x^2 \\ g_y &= 2y(x-1) \\ g_{xx} &= 6x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g_{xy} &= 2y \\ g_{yy} &= 2(x-1) \\ \mathbf{H}g(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Stationäre Punkte implizit definierter Funktionen VI

Beispiel (Fortsetzung)

3)
$$\mathbf{H}g(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ein Rückkehrpunkt.

Lösungsmenge einer skalaren Gleichung $g(x, y, z) = 0$ ist für $\operatorname{grad} g \neq \mathbf{0}$ lokal eine Fläche im $\mathbb{R}^3$.
**Tangentialebene** in $\mathbf{x}^0$ mit $g(\mathbf{x}^0) = 0$ und $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$:

$$g_x(\mathbf{x}^0)(x - x^0) + g_y(\mathbf{x}^0)(y - y^0) + g_z(\mathbf{x}^0)(z - z_0) = 0$$

d.h. der Gradient steht senkrecht auf der Fläche $g(x, y, z) = 0$.
Ist zum Beispiel $g_z(\mathbf{x}^0) \neq$, so gibt es lokal bei $\mathbf{x}^0$ eine Darstellung der Form

$$z = f(x, y)$$

**Partielle Ableitungen** von $f(x, y)$:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (f_x, f_y)^T = -\frac{1}{g_z}(g_x, g_y)^T = \left(-\frac{g_x}{g_z}, \frac{g_y}{g_z}\right)^T$$

## Das Umkehrproblem

**Frage:** Lässt sich ein vorgegebenes Gleichungssystem

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, nach $\mathbf{x}$ auflösen, also **invertieren**?

### Satz

*Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine $\mathcal{C}^1$–Funktion.*
*Ist für ein $\mathbf{x}^0 \in D$ die Jacobi–Matrix $\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ regulär, so gibt es Umgebungen $U$ und $V$ von $\mathbf{x}^0$ und $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$, so dass $\mathbf{f}$ den Bereich $U$* **bijektiv** *auf $V$ abbildet.*
*Die Umkehrfunktion $\mathbf{f}^{-1} : V \to U$ ist ebenfalls eine $\mathcal{C}^1$–Funktion und es gilt für alle $\mathbf{x} \in U$:*

$$\mathbf{J}\,\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = (\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

### Bemerkung

*Man nennt dann* $\mathbf{f}$ *lokal einen* $\mathcal{C}^1$*–Diffeomorphismus.*

## Nebenbedingungen

**Frage:**

Welche Abmessungen sollte eine Metalldose haben, damit bei vorgegebenem Volumen der Materialverbrauch am geringsten ist?

Sei $r$ der Radius und $h$ die Höhe. Dann gilt

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ O &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \end{aligned}$$

Setze bei vorgebenem $c \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2\pi x^2 + 2\pi x y \\ g(x,y) &= \pi x^2 y - c = 0 \end{aligned}$$

Bestimme das Minimum der Funktion $f(x,y)$ auf der Menge

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \,:\, g(x,y) = 0\}$$