

Rückblick auf die letzte Vorlesung

1. Vektorwertige Funktionen und Vektorfelder
2. Gradientenfeld
3. Divergenz (eines Vektorfeldes)
4. Rotation (eines Vektorfeldes im \mathbb{R}^3)
5. Totales Differential
6. Jacobi-Matrix
7. Kettenregel

Richtungsableitung II

Definition

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{x}^0 \in D$. Für $\mathbf{v} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heißt

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^0)}{t}$$

die **Richtungsableitung (Gateaux–Ableitung)** von $f(\mathbf{x})$ in Richtung \mathbf{v} .

Beispiel

Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $\mathbf{v} = (1, 1)^T$. Dann gilt für die Richtungsableitung in Richtung \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+t)^2 + (y+t)^2 - x^2 - y^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2xt + t^2 + 2yt + t^2}{t} \\ &= 2(x + y) \end{aligned}$$

Bemerkung

- 1) Für $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ ist die Richtungsableitung gerade die partielle Ableitung nach x_i :

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i(\mathbf{x}^0)}$$

- 2) Ist \mathbf{v} ein Einheitsvektor, also $\|\mathbf{v}\| = 1$, so nennt beschreibt die Richtungsableitung $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0)$ die Steigung von $f(\mathbf{x})$ in Richtung \mathbf{v} .
- 3) Ist $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 differenzierbar, so existieren sämtliche Richtungsableitungen von $f(\mathbf{x})$ in \mathbf{x}^0 und es gilt:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = \text{grad } f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{v}$$

Dies folgt aus Anwendung der Kettenregel für $\mathbf{h}(t) := \mathbf{x}^0 + t\mathbf{v}$

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0) = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{h})|_{t=0} = df(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{h}'(0)$$

Eigenschaften des Gradienten, Satz

Satz (Eigenschaften des Gradienten)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in $\mathbf{x}^0 \in D$ differenzierbar.

- 1) Der Gradientenvektor $\text{grad } f(\mathbf{x}^0) \in \mathbb{R}^n$ steht senkrecht auf der **Niveaumenge**

$$N_{\mathbf{x}^0} := \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)\}$$

Im Fall $n = 2$ nennt man die Niveaumengen auch **Höhenlinien**, im Fall $n = 3$ heißen die Niveaumengen auch **Äquipotentialflächen**.

- 2) Der Gradient $\text{grad } f(\mathbf{x}^0)$ gibt die Richtung des steilsten Anstiegs von $f(\mathbf{x})$ im Punkt \mathbf{x}^0 an.

Eigenschaften des Gradienten, Beweis

Beweisidee:

- 1) Anwendung der Kettenregel
- 2) Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

$$|D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}^0)| \leq \|\text{grad } f(\mathbf{x}^0)\|_2$$

Krummlinige Koordinaten

Sei $\Phi : U \rightarrow V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine \mathcal{C}^1 -Abbildung, für die die Jacobimatrix $\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}^0)$ an jeder Stelle $\mathbf{u}^0 \in U$ regulär ist.

Weiter existiere die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$ und sei ebenfalls eine \mathcal{C}^1 -Abbildung.

Dann definiert $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$ eine Koordinatentransformation von den Koordinaten \mathbf{u} auf \mathbf{x} .

Beispiel (Polarkoordinaten)

Betrachte für $n = 2$ die (Polar)Koordinaten $\mathbf{u} = (r, \varphi)$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$ und setze

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

mit den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x} = (x, y)$.

Umrechnung von partiellen Ableitungen von \mathbf{u} auf \mathbf{x}

Zunächst gelten für alle $\mathbf{u} \in U$ mit $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$ die folgenden Relationen:

$$\Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{J}\Phi^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{I}_n \quad (\text{Kettenregel})$$

$$\mathbf{J}\Phi^{-1}(\mathbf{x}) = (\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}))^{-1}$$

Sei nun $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und setze

$$f(\mathbf{u}) := \tilde{f}(\Phi(\mathbf{u}))$$

Dann folgt aus der Kettenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i} =: \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$$

mit

$$g^{ij} := \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}) := (g^{ij}) = (\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}))^T$$

Abkürzende Schreibweise:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Analog lassen sich die partiellen Ableitungen nach x_i durch die partiellen Ableitungen nach u_j ausdrücken:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n g_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j}$$

mit

$$(g_{ij}) := (g^{ij})^{-1} = (\mathbf{J}\Phi)^{-T} = (\mathbf{J}\Phi^{-1})^T$$

Man erhält diese Beziehungen durch Anwendung der Kettenregel auf die Funktion Φ^{-1} .

Polarkoordinaten

Beispiel

Wir betrachten die Polarkoordinaten

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Dann berechnet man

$$\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und damit

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\frac{1}{r} \sin \varphi \\ \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Die Umrechnung der partiellen Ableitungen lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Damit lässt sich etwa der **Laplace-Operator** auf Polarkoordinaten umrechnen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Kugelkoordinaten

Beispiel

Wir betrachten die Kugelkoordinaten

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ist dann gegeben durch:

$$\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Laplace-Operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\tan \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$$