Vektorwertige Funktionen

Definition

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine vektorwertige Funktion.
Die Funktion $\mathbf{f}$ heißt **partiell differenzierbar** in $\mathbf{x}^0 \in D$, falls für alle $i = 1, \ldots, n$ die Grenzwerte

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{t}$$

existieren.

Ableitung einer vektorwertigen Funktion

Die Berechnung erfolgt komponentenweise

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

Vektorfeld

Definition

Für $m = n$ nennt man die Funktion $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ ein **Vektorfeld** auf D. Ist jede Koordinatenfunktion $f_i(\mathbf{x})$ von $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)^T$ eine $\mathcal{C}^k$–Funktion, so nennt man $\mathbf{f}$ ein $\mathcal{C}^k$**–Vektorfeld**.

Beispiele

- Geschwindigkeitsfelder von strömenden Flüssigkeiten oder Gasen,
- elektromagnetische Felder oder
- Temperaturgradienten in Festkörpern.

Divergenz

Definition

Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ definiert man die **Divergenz** durch

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)$$

Andere **Notationen:**

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\nabla, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

Rechenregeln für die Divergenz

Bemerkung

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} div(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) &= \alpha\, div \mathbf{f} + \beta\, div \mathbf{g} \\ div(\varphi \cdot \mathbf{f}) &= (\nabla\varphi, \mathbf{f}) + \varphi\, div \mathbf{f} \end{aligned}$$

Bemerkung

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion, so gilt für den Laplace–Operator

$$\Delta f = div(\nabla f)$$

Rotation

Definition

Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, definiert man die **Rotation** durch

$$\text{rot } \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^T \Big|_{\mathbf{x}^0}$$

Rotation II

Andere **Notationen:**

$$\text{rot } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Bemerkung

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) &= \alpha\, \mathrm{rot}\, \mathbf{f} + \beta\, \mathrm{rot}\, \mathbf{g} \\ \mathrm{rot}\,(\varphi \cdot \mathbf{f}) &= (\nabla\varphi) \times \mathbf{f} + \varphi\, \mathrm{rot}\, \mathbf{f} \end{aligned}$$

Rotation und Gradientenfeld

Bemerkung

Ist $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, eine $\mathcal{C}^2$–Funktion, so folgt aufgrund des Vertauschbarkeitssatzes von Schwarz

$$\mathrm{rot}\,(\nabla\varphi) = 0\,,$$

d.h. Gradientenfelder sind stets rotationsfrei.

Vollständiges Differential

Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{x}^0 \in D$ und $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$. $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ heißt (**vollständig** bzw. **total**)**differenzierbar** in $\mathbf{x}^0$, falls es eine lineare Abbildung

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) := \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

mit Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ gibt, für die die Approximationseigenschaft

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{o}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|)$$

d.h.

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} = 0$$

erfüllt ist.

Funktionalmatrix

Bezeichnungen:

Man nennt die lineare Abbildung $\mathbf{l}$ das (**vollständige** oder **totale**) **Differential** von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ im Punkt $\mathbf{x}^0$ und bezeichnet $\mathbf{l}$ mit $\mathbf{df}(\mathbf{x}^0)$. Die zugehörige Matrix $\mathbf{A}$ heißt **Jacobi–Matrix** oder **Funktionalmatrix** von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ im Punkt $\mathbf{x}^0$ und wird mit $\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ (manchmal auch mit $\mathbf{D}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ oder $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)$) bezeichnet.

Bemerkung

Für $m = n = 1$ erhalten wir die aus Analysis I bekannte Beziehung

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

für die Ableitung $f'(x_0)$ im Punkt x_0.

Spezialfall der Funktionalmatrix

Bemerkung

Im Fall einer skalaren Funktion ($m = 1$) ist $\mathbf{A} = \mathbf{a}$ ein Zeilenvektor und $\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ ein Skalarprodukt $\langle \mathbf{a}^T, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle$.

Differenzierbarkeit

Satz

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}^0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, D offen.

a) *Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$ differenzierbar, so ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ auch stetig in $\mathbf{x}^0$.*

b) *Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$ differenzierbar, so ist das Differential und damit auch die Jacobi–Matrix eindeutig bestimmt und es gilt*

$$\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathit{grad}\, f_1(\mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ \mathit{grad}\, f_m(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix}$$

c) *Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ eine $\mathcal{C}^1$–Funktion auf D, so ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ auf D (vollständig) differenzierbar.*

Differenzierbarkeit

Bemerkung

Man beachte, dass **differenzierbar** *hier* **vollständig/total** *differenzierbar bedeutet.*

Beweis von a)

Ist $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}^0$ differenzierbar, so gilt nach Definition

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|} = 0$$

Daraus folgt aber

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\| = 0$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\| &\leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\| + \|\mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\| \\ &\to 0 \qquad \text{für } \mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion $\mathbf{f}$ stetig im Punkt $\mathbf{x}^0$.

Beweis von b)

Sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i$, $|t| < \varepsilon$, $i \in \{1,\dots,n\}$.
Da $\mathbf{f}$ im Punkt $\mathbf{x}^0$ differenzierbar ist, folgt

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|_\infty} = 0$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|_\infty} &= \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{|t|} - \frac{t\mathbf{A}\mathbf{e}_i}{|t|} \\ &= \frac{t}{|t|}\cdot\left(\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{t} - \mathbf{A}\mathbf{e}_i\right) \\ &\to 0 \qquad (t\to 0) \end{aligned}$$

Beweis von b) [Fortsetzung]

Daraus folgt

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)}{t} = \mathbf{A}\mathbf{e}_i \qquad i = 1,\dots,n$$

Beispiel

a) Betrachte die skalare Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 e^{2x_2}$. Dann lautet die Jacobi–Matrix:

$$\mathbf{J}f(x_1, x_2) = \operatorname{grad} f(x_1, x_2) = e^{2x_2}(1, 2x_1)$$

b) Betrachte die Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1x_2x_3 \\ \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{pmatrix}$$

Die Jacobi–Matrix ergibt sich in der Form

$$\mathbf{Jf}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \\ \cos s & 2\cos s & 3\cos s \end{pmatrix}$$

wobei $s = x_12x_2 + 3x_3$.

Ableitungen

Beispiel

c) Sei $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

d) Sei $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{e}_i \rangle \\ &= \mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{e}_i \\ &= \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T + \mathbf{A})\mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{J}f(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T + \mathbf{A})$$

Differentiationsregeln

Satz (Differentiationsregeln)

1) **Linearität** *Sind $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\mathbf{x}^0 \in D$, D offen, so ist auch $\alpha\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \beta\,\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$, α, β reell, differenzierbar in $\mathbf{x}^0$ und es gilt*

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g})(\mathbf{x}^0) &= \alpha\,\mathbf{df}(\mathbf{x}^0) + \beta\,\mathbf{dg}(\mathbf{x}^0) \\ \mathbf{J}(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g})(\mathbf{x}^0) &= \alpha\,\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0) + \beta\,\mathbf{Jg}(\mathbf{x}^0) \end{aligned}$$

2) **Kettenregel** *Ist $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\mathbf{x}^0 \in D$, D offen, und ist $\mathbf{g} : E \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $\mathbf{y}^0 = f(\mathbf{x}^0) \in E \subset \mathbb{R}^m$, E offen, so ist $g \circ f$ ebenfalls in $\mathbf{x}^0$ differenzierbar.*

Für die Differentiale gilt

$$\mathbf{d}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}^0) = \mathbf{dg}(\mathbf{y}^0) \circ \mathbf{df}(\mathbf{x}^0)$$

und analog für die Jacobi–Matrizen

Beispiel (Kettenregel)

Sei $\mathbf{h} : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, eine in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurve mit Werten in $D \subset \mathbb{R}^n$, D offen, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine in $\mathbf{x}^0 = \mathbf{h}(t_0)$ differenzierbare skalare Funktion.
Dann ist auch die Hintereinanderausführung

$$(f \circ \mathbf{h})(t) = f(h_1(t), \dots, h_n(t))$$

in t_0 differenzierbar, und für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} (f \circ \mathbf{h})'(t_0) &= \mathbf{J}f(\mathbf{h}(t_0)) \cdot \mathbf{Jh}(t_0) \\ &= \operatorname{grad} f(\mathbf{h}(t_0)) \cdot \mathbf{h}'(t_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{h}(t_0)) \cdot h_k(t_0) \end{aligned}$$