Rückblick auf die letzte Vorlesung

1. Flächen
2. Parameterdarstellungen von Flächen
3. Oberflächenintegrale
4. Tangentialvektoren
5. Satz von Gauß

Proseminare

Veranstalter	Thema	Adressaten
Heinrich Voß:	„Numerische Lineare Algebra“	IIW
Wolfgang Mackens:	„Anwendungen der Mathematik“	alle(?)

Listen liegen für das erste Proseminar aus (SBS 95, 3. Stock). Weitere Informationen, Ankündigung der Vorbesprechung etc. per Internet.

Ausblick auf die heutige Vorlesung

1. Greensche Formeln
2. Satz von Stokes

Folgerung aus dem Integralsatz von Gauß

Satz (Formeln von Green)

$G \subset \mathbb{R}^3$ erfülle die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes. Für $\mathcal{C}^2$–Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$, $G \subset D$, gelten dann die Relationen:

$$\begin{aligned} \int_G (f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g\rangle) d\mathbf{x} &= \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\, do \\ \int_G (f\Delta g - g\Delta f) d\mathbf{x} &= \oint_{\partial G} \left(f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\right) do. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichne

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{n}} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G$$

die Richtungsableitung von $f(\mathbf{x})$ in Richtung des äußeren Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Beweis der Greenschen Formeln

Beweis

Wir setzen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x}).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} div\,\mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_3}\right) \\ &= f \cdot \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle \end{aligned}$$

Beweis der Greenschen Formeln

Beweis

Wir wenden nun den Gaußschen Integralsatz an:

$$\begin{aligned} \int_G (f \cdot \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle)\, d\mathbf{x} &= \int_G div\,\mathbf{F}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle\, do \\ &= \oint_{\partial G} f\, \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle\, do = \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\, do \end{aligned}$$

Die zweite Greensche Formel folgt direkt durch Vertauschen von f und g.

Der Satz von Stokes

Satz (Integralsatz von Stokes)

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^3$ *ein* $\mathcal{C}^1$*–Vektorfeld auf einem Gebiet* $D \subset \mathbb{R}^3$*. Weiter sei* $F = \mathbf{p}(K)$ *eine Fläche in* D*,* $F \subset D$*, mit der Parametrisierung* $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$*,* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$*.*

$K \subset \mathbb{R}^2$ *sei ein Greenscher Bereich. Der Rand* ∂K *werde durch eine stückweise glatte* $\mathcal{C}^1$*–Kurve* $\mathbf{c}$ *parametrisiert, deren Bild* $\tilde{\mathbf{c}}(t) := p(\mathbf{c}(t))$ *dann den Rand* ∂F *der Fläche* F *parametrisiert.*

Die Orientierung der Randkurve $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ *sei hierbei so gewählt, dass* $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{c}}(t)) \times \dot{\tilde{\mathbf{c}}}(t)$ *in Richtung der Fläche weist.*

Dann gilt

$$\int_F rot\,\mathbf{f}(\mathbf{x})\,do = \oint_{\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

Anwendung des Satzes von Stokes

Beispiel

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (-y, x, -z)^T$$

und die geschlossene Kurve $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ parametrisiert durch

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t)\rangle\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

Anwendung des Satzes von Stokes II

Beispiel (Fortsetzung)

Wir definieren nun eine Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$, die durch die Kurve $\mathbf{c}(t)$ berandet wird:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} =: \mathbf{p}(\varphi, \psi)$$

mit $(\varphi, \psi) \in K := [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$, d.h. F ist gerade die obere Kugelhälfte.
Der Integralsatz von Stokes besagt nun:

$$\int_F \operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})\,do = \oint_{\mathbf{c}=\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Anwendung des Satzes von Stokes III

Beispiel (Fortsetzung)

Wir haben bereits die rechte Seite, ein **Kurvenintegral 2. Art**, berechnet:

$$\oint_{\mathbf{c}=\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 2\pi$$

Es bleibt also das **Oberflächenintegral 2. Art**:

$$\int_F \operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})\,do = \int_K \left\langle \operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{p}(\varphi,\psi)), \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\psi} \right\rangle d\psi d\varphi.$$

Anwendung des Satzes von Stokes III

Bemerkung

Die rechte Seite ist ein **Bereichsintegral**.

Man berechnet direkt, dass $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (0,0,2)^T$ und

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \psi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos^2\psi \\ \sin\varphi \cos^2\psi \\ \sin\psi \cos\psi \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2 \sin\psi \cos\psi d\varphi d\psi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin(2\psi)\, d\psi = 2\pi.$$