

1. Rotation
2. Einfach zusammenhängend
3. Satz von Green
4. Existenz eines Potentials
5. Integrabilitätsbedingungen

Ausblick auf die heutige Vorlesung

1. Oberflächenintegrale
2. Parameterdarstellungen von Flächen
3. Tangentialvektoren
4. Satz von Gauß
5. Greensche Formeln

Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^1 -Abbildung

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Sind für alle $\mathbf{u} \in D$ die beiden Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}$$

linear unabhängig, so heißt

$$F := \{\mathbf{p}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in D\}$$

eine **Fläche** bzw. ein **Flächenstück**.

Parameterdarstellung von Flächen II

Definition (Fortsetzung)

Die Abbildung $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ nennt man eine **Parametrisierung** oder **Parameterdarstellung** der Fläche F .

Beispiel

Wir betrachten für gegebenes $r > 0$ die Abbildung

$$\mathbf{p}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Die dadurch parametrisierte Fläche ist ein unbeschränkter Zylinder im \mathbb{R}^3 .

Zylinder II

Beispiel

Schränken wir den Definitionsbereich ein, etwa

$$(\varphi, z) \in K = [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$

so erhalten wir einen beschränkten Zylinder der Höhe H .

Beispiel (Fortsetzung)

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit linear unabhängig auf ganz \mathbb{R}^2 .

Graphen als Flächen

Beispiel

Der Graph einer skalaren \mathcal{C}^1 -Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet, ist eine Fläche.

Eine Parametrisierung ist etwa gegeben durch

$$\mathbf{p}(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi(u_1, u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D.$$

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{u_1} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{u_2} \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig.

Die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0)$$

liegen **tangential** an die Fläche F .

Sie spannen die **Tangentialebene** $T_{\mathbf{x}^0}F$ an die Fläche F im Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ auf.

Die Tangentialebene hat die Parameterdarstellung

$$T_{\mathbf{x}^0}F : \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) + \mu \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Frage:

Wie kann ich den Flächeninhalt einer gegebenen Fläche F berechnen?

Oberflächenintegral

Definition

Sei $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung einer Fläche, und sei $K \subset D$ kompakt, messbar und zusammenhängend.

Dann wird der Flächeninhalt von $\mathbf{p}(K)$ definiert durch das

Oberflächenintegral

$$\int_{\mathbf{p}(K)} do := \int_K \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| d\mathbf{u}.$$

Dabei nennt man den Term

$$do := \int_K \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| d\mathbf{u}$$

auch das **Oberflächenelement** der Fläche $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$.

Das Oberflächenintegral ist insbesondere **unabhängig** von der speziellen

Parametrisierung der Fläche. Dies folgt aus dem Transformationsatz.

Beispiel

Für die Mantelfläche des Zylinders $Z = \mathbf{p}(K)$ mit

$$K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2$$

erhält man wegen

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \right\| = r$$

den Wert

$$O(Z) = \int_Z do = \int_K rd(\varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^H rdz d\varphi = 2\pi rH.$$

Flächeninhalt auf einem Graphen

Beispiel

Ist die Fläche der Graph einer skalaren Funktion, d.h. $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$, so gilt für die zugehörigen Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{x_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_{x_1} \\ -\varphi_{x_2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\| = \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2}$$

und

$$\begin{aligned} O(\mathbf{p}(K)) &= \int_{\mathbf{p}(K)} do \\ &= \int \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2} d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Beispiel

Wir berechnen die Oberfläche des Paraboloids P gegeben durch

$$P := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 2 - x_1^2 - x_2^2, x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} O(P) &= \int_{x_1^2 + x_2^2 \leq 2} \sqrt{1 + 4x_1^2 + x_2^2} \, d(x_1, x_2) \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, d\varphi \, dr = \pi \int_0^2 \sqrt{1 + 4s} \, ds \\ &= \pi \left[\frac{1}{6} (1 + 4s)^{3/2} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{1}{6} (27 - 1) \right) = \frac{13}{3} \pi \end{aligned}$$

Integration auf Flächen

Bemerkung

Für das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2.$$

Daraus folgt

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\rangle^2.$$

Definiert man

$$E := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2, \quad F := \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\rangle^2, \quad G := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2,$$

so ergibt sich die Beziehung

$$do = \sqrt{EG - F^2} \, d(u_1, u_2).$$

Beispiel

Für das Oberflächenelement der Sphäre

$$S_r^2 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$$

ergeben sich mit der Parametrisierung über Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

die Beziehungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Flächeninhalt auf der Sphäre II

Beispiel (Fortsetzung)

Daraus folgt

$$E = r^2 \cos^2 \theta, \quad F = 0, \quad G = r^2.$$

Beispiel (Fortsetzung)

Aus der Beziehung

$$do = \sqrt{EG - F^2} d(u_1, u_2).$$

folgt daher

$$do = r^2 \cos \theta d(\varphi, \theta), \quad (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Wir können nun die Oberfläche der Kugel berechnen:

$$\begin{aligned} O &= \int_{S_r^2} do = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta d\varphi d\theta \\ &= 2\pi r^2 \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Oberflächenintegral

Definition

Sei $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ eine \mathcal{C}^1 -Parametrisierung einer Fläche $F = \mathbf{p}(K)$, $K \subset D$ kompakt, messbar und zusammenhängend.

- 1) Für eine stetige Funktion $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man das **Oberflächenintegral 1. Art** durch

$$\int_F f(\mathbf{x}) do := \int_K f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| du$$

- 2) Für ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : F \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert man das **Oberflächenintegral 2. Art** durch

$$\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) do := \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle du$$

Der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ auf der Fläche F ist gegeben durch

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \frac{\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\|}.$$

Wir schreiben daher auch

$$\begin{aligned} \int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\sigma &= \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle d\mathbf{u} \\ &= \int_K \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \rangle \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| d\mathbf{u} \\ &= \int_F \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma. \end{aligned}$$

Bemerkung

1) Physikalische Interpretation der Oberflächenintegrale:

Ist $\rho(\mathbf{x})$ die Dichte einer massenbelegten Fläche, so liefert das Integral 1. Art gerade die Gesamtmasse der Fläche.

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung, so liefert das Integral 2. Art die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche F strömt, d.h. den **Fluss** von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ durch die Fläche F .

2) Ist F eine geschlossen Fläche, d.h. die Oberflächen eines kompakten einfach zusammenhängenden Körpers im \mathbb{R}^3 , so schreiben wir wiederum

$$\oint_F f(\mathbf{x}) \, d\sigma \quad \text{bzw.} \quad \oint_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\sigma$$

Die Parametrisierung ist dabei so gewählt, dass der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ nach außen weist.

Satz (Integralsatz von Gauß)

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein kompakter und messbarer Standardbereich, d.h. G sei bezüglich jeder Koordinate projizierbar. Der Rand ∂G bestehe aus endlich vielen glatten Flächenstücken mit äußerer Normale $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Ist $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dann ein C^1 -Vektorfeld mit $G \subset D$, so gilt

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o}.$$

Interpretation des Gaußschen Satzes

Interpretation:

Die linke Seite ist ein Bereichsintegral über die skalare Funktion $g(\mathbf{x}) := \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Die rechte Seite ist ein Oberflächenintegral 2. Art bezüglich des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer **inkompressiblen** Strömung, so gilt $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ und daher

$$\oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o} = 0.$$

Beispiel

Wir betrachten das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ und die Kugel K :

$$K := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}.$$

Dann gilt offensichtlich

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3$$

und damit

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 3 \cdot \operatorname{vol}(K) = 4\pi.$$

Das entsprechende Oberflächenintegral läßt sich am besten durch Übergang auf Kugelkoordinaten, d.h. die Parametrisierung der Kugel durch Kugelkoordinaten, berechnen.

Folgerung aus dem Integralsatz von Gauß

Satz (Formeln von Green)

$G \subset \mathbb{R}^3$ erfülle die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes. Für \mathcal{C}^2 -Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset D$, gelten dann die Relationen:

$$\int_G (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \, d\sigma$$
$$\int_G (f \Delta g - g \Delta f) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial G} \left(f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) \, d\sigma.$$

Hierbei bezeichne

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{n}} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial G$$

die Richtungsableitung von $f(\mathbf{x})$ in Richtung des äußeren Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Beweis

Wir setzen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x}).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_3} \right) \\ &= f \cdot \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle \end{aligned}$$

Wir wenden nun den Gaußschen Integralsatz an:

$$\begin{aligned} \int_G (f \cdot \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) d\mathbf{x} &= \int_G \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\sigma \\ &= \oint_{\partial G} f \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle d\sigma = \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\sigma \end{aligned}$$

Der Satz von Stokes

Satz (Integralsatz von Stokes)

Sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$. Weiter sei $F = \mathbf{p}(K)$ eine Fläche in D , $F \subset D$, mit der Parametrisierung $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$.

$K \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Greenscher Bereich. Der Rand ∂K werde durch eine stückweise glatte C^1 -Kurve \mathbf{c} parametrisiert, deren Bild $\tilde{\mathbf{c}}(t) := \mathbf{p}(\mathbf{c}(t))$ dann den Rand ∂F der Fläche F parametrisiert.

Die Orientierung der Randkurve $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ sei hierbei so gewählt, dass $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{c}}(t)) \times \dot{\tilde{\mathbf{c}}}(t)$ in Richtung der Fläche weist.

Dann gilt

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\sigma = \oint_{\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$