Rückblick auf die letzte Vorlesung

1. Kurvenintegrale
2. Potential
3. Rotation
4. Zusammenhang

Ausblick auf die heutige Vorlesung

1. Rotation
2. Einfach zusammenhängend
3. Satz von Green

Nichtexistenz eines Potentials

Beispiel

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad (x,y)^T \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Für den Einheitskreis $\mathbf{c}(t) := (\cos t, \sin t)^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$, gilt:

$$\begin{aligned}\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t)\rangle\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt\end{aligned}$$

Nichtexistenz eines Potentials II

Beispiel (Fortsetzung)

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

$\mathbf{f}(x,y)$ ist also nicht wirbelfrei und besitzt folglich auf D auch kein Potential.

Rotation

Bemerkung

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^3$, *ein* $\mathcal{C}^1$*–Vektorfeld mit Potential* $\varphi(\mathbf{x})$, *so folgt:*

$$rot\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = rot\, (\nabla \varphi(\mathbf{x})) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{x} \in D$$

Daraus folgt, dass rot $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ *eine* **notwendige Bedingung** *für die Existenz eines Potentials ist.*
Definiert man für ein Vektorfeld $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$, *die* **skalare** *Rotation*

$$rot\, \mathbf{f}(x, y) := \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y)$$

so ist rot $\mathbf{f}(x, y) = 0$ *auch in zwei Dimensionen eine notwendige Bedingung.*

Rotation II

Bemerkung

Die Bedingung

$$rot\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

ist eine **hinreichende Bedingung**, *falls das Gebiet D* **einfach zusammenhängend** *ist, d.h. keine "Löcher" enthält.*

Einfacher Zusammenhang und Rotation

Beispiel

Wir betrachten wieder das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad (x,y)^T \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Berechnet man die Rotation, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\left[\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Rotation und Potential

Beispiel

Die Rotation von $\mathbf{f}(x,y)$ verschwindet zwar, aber $\mathbf{f}(x,y)$ besitzt auf der Menge $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ kein Potential.
Das Gebiet ist nämlich **nicht** einfach zusammenhängend.

Der Integralsatz von Green

Satz (Integralsatz von Green)

Sei $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *ein* $\mathcal{C}^1$*–Vektorfeld auf dem Gebiet* $D \subset \mathbb{R}^2$*.* $K \subset D$ *sei kompakt und bezüglich beider Koordinatenrichtungen projizierbar.* K *wird dann von einer geschlossenen, stückweisen* $\mathcal{C}^1$*–Kurve* $\mathbf{c}(t)$ *berandet. Die Parametrisierung sei so gewählt, dass* K *stets links zur Durchlaufrichtung liegt (positiver Umlauf).*
Dann gilt:

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_K \mathit{rot}\, \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Verallgmeinerung

Bemerkung

Der Greensche Integralsatz gilt auch für kompakte Bereiche, die sich in endlich viele, bezüglich beider Koordinatenrichtungen projizierbare Bereiche zerlegen lassen, in so genannte **Greensche Bereiche***.*

Alternativen

Andere Darstellungen des Integralsatzes von Green: Wir hatten gesehen, dass die Beziehung

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \oint_c \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, ds$$

gilt, wobei $\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$ den Tangenteneinheitsvektor bezeichnet. Daraus folgt aber mit dem Integralsatz von Green

$$\int_K \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, ds$$

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld, so ist die durch $\mathbf{f}$ beschriebene Strömung unter der Bedingung $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ wirbelfrei, denn

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

ist gerade die Zirkulation von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Alternativen II

Andere Darstellungen des Integralsatzes von Green:
Ersetzt man in der obigen Gleichungen den Vektor $\mathbf{T}$ durch den äußeren Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n} = (T_2, -T_1)^T$, so folgt

$$\begin{aligned} \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle \, ds &= \oint_{\partial K} (f_1 T_2 - f_2 T_1) ds = \oint_{\partial K} \left\langle \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}, \mathbf{T} \right\rangle \, ds \\ &= \int_K \operatorname{rot} \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} \, d\mathbf{x} = \int_K \operatorname{div} \mathbf{f} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

und damit die Beziehung

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle \, ds$$

Alternativen II

Die rechte Seite beschreibt den **Gesamtfluss** der Strömung durch den Rand von K. Gilt also $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, so ist die Strömung **quellen– und senkenfrei**.

Einfacher Zusammenhang

Folgerung: Ist $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in D$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, so folgt

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$$

für jede geschlossene stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve, die einen Greenschen Bereich $B \subset D$ vollständig umrandet.

Definition

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls sich jede geschlossene Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \to D$ stetig innerhalb D auf einen Punkt in D zusammenziehen lässt, d.h. genauer:
Es gibt eine stetige Abbildung

$$\Phi : [a, b] \times [0, 1] \to D$$

Einfacher Zusammenhang II

Definition (Fortsetzung)

Es gibt eine stetige Abbildung

$$\Phi : [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow D$$

mit $\Phi(t, 0) = \mathbf{c}(t)$, $\forall\, t \in [a, b]$ und $\Phi(t, 1) = \mathbf{x}^0 \in D$, $\forall\, t \in [a, b]$.
Die Abbildung $\Phi(t, s)$ heißt auch **Homotopie**.

Integrabilitätsbedingung

Satz

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.Ein $\mathcal{C}^1$–Vektorfeld $\mathbf{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt genau dann ein Potential auf D, falls die **Integrabilitätsbedingung**

$$\forall\, \mathbf{x} \in D \;:\; \mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}))^T$$

erfüllt ist.
Ausgeschrieben bedeutet dies

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \qquad \forall\, j, k$$

Integrabilitätsbedingung II

Bemerkung

In den Fällen $n = 2, 3$ stimmt die Integrabilitätsbedingung mit der Bedingung

$$\mathit{rot}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

überein.

Existenz eines Potentials

Beispiel

Gegeben sei für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{2xy}{r^2} + \sin z \\ \ln r^2 + \dfrac{2y^2}{r^2} + ze^y \\ \dfrac{2yz}{r^2} + e^y + x\cos z \end{pmatrix}, \quad r^2 := x^2 + y^2 + z^2$$

Wir wollen untersuchen, ob $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential besitzt und dieses gegebenenfalls bestimmen.

$\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist offensichtlich **einfach zusammenhängend**. Weiter gilt:

$$\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0.$$

Also besitzt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential.

Berechnung des Potentials

Beispiel (Fortsetzung)

Es muss gelten: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$. Demnach folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f_1 = \frac{2xy}{r^2} + \sin z.$$

Durch Integration bezüglich der Variablen x folgt:

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \ln r^2 + x \sin z + c(y, z)$$

mit einer unbekannten Funktion $c(y, z)$. Einsetzen in die Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = f_2 = \ln r^2 + \frac{2y^2}{r^2} + ze^y$$

ergibt

$$\ln r^2 + \frac{2y^2}{r^2} + \frac{\partial c}{\partial y} = \ln r^2 + \frac{2y^2}{r^2} + ze^y.$$

Berechnung des Potentials

Beispiel (Fortsetzung)

Daraus folgt die Bedingung

$$\frac{\partial c}{\partial y} = ze^y$$

und es gilt

$$c(y, z) = ze^y + d(z).$$

Wir haben damit:

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \ln r^2 + x \sin z + ze^y + d(z)$$

mit der noch unbekannten Funktion $d(z)$.

Berechnung des Potentials II

Beispiel (Fortsetzung)

Die letzte Bedingung lautet

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3 = \frac{2yz}{r^2} + e^y + x \cos z$$

Daraus folgt $d'(z) = 0$ und das Potential ist gegeben durch

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \ln r^2 + x \sin z + z e^y + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Parameterdarstellung von Flächen

Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\mathbf{p} : D \to \mathbb{R}^3$ eine $\mathcal{C}^1$–Abbildung

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u}),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Sind für alle $\mathbf{u} \in D$ die beiden Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}$$

linear unabhängig, so heißt

$$F := \{\mathbf{p}(\mathbf{u}) \ : \ \mathbf{u} \in D\}$$

eine **Fläche** bzw. ein **Flächenstück**.