1. Berechnung von Integralen
2. Schwerpunkt
3. Trägheitsmoment
4. Transformationssatz

Ausblick auf die heutige Vorlesung

1. Kurventintegrale
2. Potential
3. Rotation
4. Zusammenhang

Für eine stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \to D$, $D \subset \mathbb{R}^n$, und eine stetige, skalare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ haben wir das **Kurvenintegral 1. Art** definiert durch

$$\int_c f(\mathbf{x}) ds := \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

wobei $\| \cdot \|$ die euklidische Norm bezeichnet.

Erweiterung auf Kurvenintegrale über vektorwertige Funktionen, d.h.

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} :=?$$

Kurvenintegrale

Anwendung und Interpretation:
Ein Massenpunkt bewegt sich entlang $\mathbf{c}(t)$ in einem Kraftfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Welche **Arbeit** muss entlang der Kurve geleistet werden?

Definition

Für ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und eine stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \to D$ definieren wir das **Kurvenintegral 2. Art** durch

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t), \dot{\mathbf{c}}(t)\rangle \, dt$$

Herleitung Kurvenintegral

Herleitung:

Approximiere die Kurve durch einen Streckenzug mit Ecken $\mathbf{c}(t_i)$, wobei

$$Z = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\}$$

eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ist.

Dann gilt für die in einem Kraftfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ entlang der Kurve $\mathbf{c}(t)$ geleistete Arbeit die Näherungsformel:

$$A \approx \sum_{i=0}^{m-1} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t_i)), \mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i)\rangle$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} f_j(\mathbf{c}(t_i))(c_j(t_{i+1}) - c_j(t_i)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} f_j(\mathbf{c}(t_i))\dot{c}_j(\tau_{ij})(t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

Für eine Folge von Zerlegungen Z mit $\|Z\| \to 0$ konvergiert die linke Seite gegen das oben definierte **Kurvenintegral 2. Art**.

Geschlossene Kurven

Bemerkung

Für eine geschlossene Kurve $\mathbf{c}(t)$, *d.h.* $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, *schreibt man das Kurvenintegral auch als*

$$\oint_{c} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathbf{dx}$$

1) **Linearität:**

$$\int_c (\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{g}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \alpha \int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \beta \int_c \mathbf{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

2) Es gilt:

$$\int_{-c} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

wobei $(-\mathbf{c})(t) := c(b + a - t)$, $a \le t \le b$

3) Es gilt:

$$\int_{c_1 + c_2} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{c_1} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{c_2} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} =$$

wobei der Endpunkt von $\mathbf{c}_1$ der Anfangspunkt von $\mathbf{c}_2$ ist.

4) Das Kurvenintegral 2. Art ist **parametrisierungsinvariant**.

5) Es gilt:

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \mathbf{T}(t) \rangle \, \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\, dt = \int_c \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle\, ds$$

mit dem **Tangenten–Einheitsvektor** $\mathbf{T}(t) := \dfrac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$.

6) Formale Schreibweise:

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_c \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\, dx_i = \sum_{i=1}^n \int_c f_i(\mathbf{x})\, dx_i$$

mit

$$\int_c f_i(\mathbf{x})\, dx_i := \int_a^b f_i(\mathbf{c}(t)) \dot{c}_i(t)\, dt$$

Beispiel

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sei

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &:= (-y, x, z^2)^T \\ \mathbf{c}(t) &:= (\cos t, \sin t, at)^T, \qquad 0 \le t \le 2\pi \end{aligned}$$

Ein spezielles Kurvenintegral II

Beispiel (Fortsetzung)

Dann berechnet man

$$\begin{aligned} \int\limits_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &= \int\limits_c (-ydx + xdy + z^2 dz) \\ &= \int\limits_0^{2\pi} (-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t + a^2 t^2 a)\, dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} (1 + a^3 t^2)\, dt \\ &= 2\pi + \frac{a^3}{3}(2\pi)^3 \end{aligned}$$

Definition

Ist $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld eines strömenden Mediums, so nennt man das Kurvenintegral $\oint_c \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ entlang einer geschlossenen Kurve auch die **Zirkulation** des Feldes $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Zirkulation – ein Beispiel

Beispiel

Für das Feld $\mathbf{u}(x, y) = (y, 0)^T \in \mathbb{R}^2$ erhält man längs der Kurve $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, 1 + r\sin t)^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$ die Zirkulation

$$\begin{aligned}
\oint_c \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} (1 + r\sin t)(-r\sin t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-r\sin t - r^2 \sin^2 t) dt \\
&= \left[r\cos t - \frac{r^2}{2}(t - \sin t \cos t) \right]_0^{2\pi} = -\pi r^2
\end{aligned}$$

Definition

Ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, heißt **wirbelfrei**, falls dessen Kurvenintegral längs **aller** geschlossenen, stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurven $\mathbf{c}(t)$ in D verschwindet, d.h.

$$\forall\, \mathbf{c} \quad : \quad \oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Bemerkung

Ein Vektorfeld ist genau dann wirbelfrei, wenn der Wert des Kurvenintegrals $\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ nur vom Anfangs– und Endpunkt des Weges, jedoch nicht vom konkreten Verlauf der Kurve **c** *abhängt. Man sagt: das Kurvenintegral ist* **wegunabhängig**.

Wegunabhängigkeit

Frage:

Welche Kriterien für das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ **garantieren** die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals?

Definition

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **zusammenhängend**, falls je zwei Punkte in D durch eine stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve verbunden werden können:

$$\forall\, \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0 n \in D \;:\; \exists\, \mathbf{c} : [a,b] \to D \quad : \quad \mathbf{c}(a) = \mathbf{x}^0 \,\wedge\, \mathbf{c}(b) = \mathbf{y}^0$$

Eine offene und zusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ nennt man auch ein **Gebiet** in $\mathbb{R}^n$.

Nicht zusammenhängende Mengen

Bemerkung

Eine **offene** *Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann* **nicht** *zusammenhängend, wenn es* **disjunkte**, *offene Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit*

$$U_1 \cup D \neq \emptyset, \quad U_2 \cup D \neq \emptyset, \quad D \subset U_1 \cap U_2$$

Nicht zusammenhängende offene Mengen sind also – im Gegensatz zu zusammenhängenden Mengen – in (zumindest) zwei disjunkte offene Bereiche trennbar.

Definition

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$. Das Vektorfeld nennt man ein **Gradientenfeld**, falls es eine skalare $\mathcal{C}^1$–Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x}).$$

Die Funktion $\varphi(\mathbf{x})$ heißt dann **Stammfunktion** oder **Potential** von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Potentielle Energie

Bemerkung

Ein Massenpunkt bewege sich in einem **konservativen** *Kraftfeld* $\mathbf{K}(\mathbf{x})$, *d.h.* $\mathbf{K}$ *besitzt ein Potential* $\varphi(\mathbf{x})$.
Dann ist $U(\mathbf{x}) = -\nabla\varphi(\mathbf{x})$ *gerade die* **potentielle Energie***:*

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\varphi(\mathbf{x})$$

Multipliziert man diese Beziehung mit $\dot{\mathbf{x}}$, *so folgt:*

$$m\langle\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}\rangle + \langle\nabla U(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}}\rangle = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + U(\mathbf{x})\right) = 0.$$

Satz

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein stetiges Vektorfeld auf D.

1) *Besitzt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential $\varphi(\mathbf{x})$, so gilt für alle stückweisen $\mathcal{C}^1$–Kurven $\mathbf{c} : [a, b] \to D$:*

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{c}(b)) - \varphi(\mathbf{c}(a))$$

Insbesondere ist das Kurvenintegral wegunabhängig und $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist wirbelfrei.

Hauptsatz für Kurvenintegrale II

Satz (Fortsetzung)

2) *Umgekehrt gilt: Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ wirbelfrei, so besitzt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential $\varphi(\mathbf{x})$. Ist $\mathbf{x}^0 \in D$ ein fester Punkt, und bezeichnet $\mathbf{c}_\mathbf{x}$ (für $\mathbf{x} \in D$) eine beliebige, die Punkt $\mathbf{x}^0$ und $\mathbf{x}$ verbindende stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve in D, so ist $\varphi(\mathbf{x})$ gegeben durch:*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{c_x} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + c, \qquad c = const.$$

Beispiel

Das zentrale Kraftfeld

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

besitzt das Potential

$$U(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}.$$

Denn es gilt:

$$\nabla U(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2}(x, y, z)^T = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

Zentrales Kraftfeld II

Beispiel (Fortsetzung)

Für die längs einer stückweisen $\mathcal{C}^1$–Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ geleistete Arbeit gilt dann:

$$A = \int_c \mathbf{K}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{c}(a)\|} - \frac{1}{\|\mathbf{c}(b)\|}\right)$$

Beispiel

Das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 3z \\ 3xz^2 + 3y \end{pmatrix}$$

besitzt das Potential

$$\varphi(\mathbf{x}) = x^2y + xz^3 + 3yz.$$

Für eine beliebige, die Punkte $P = (1, 1, 2)$ und $Q = (3, 5, -2)$ verbindende $\mathcal{C}^1$–Kurve $\mathbf{c}(t)$ gilt also:

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \varphi(Q) - \varphi(P) = -9 - 15 = -24.$$

Elektrisches Feld und Spannung II

Beispiel (Fortsetzung)

Interpretiert man $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ als elektrisches Feld, so gibt das Kurvenintegral 2. Art die Spannung zwischen den beiden Punkten P und Q an.