Rückblick auf die letzte Vorlesung

1. Integration (Fortsetzung)
2. Existenz von Integralen auf Quadern und allgemeineren Mengen
3. Satz von Fubini
4. Berechnung von Integralen
5. Volumina
6. Normalgebiete
7. Pojizierbare Mengen

Ausblick auf die heutige Vorlesung

1. Berechnung von Integralen
2. Schwerpunkt
3. Trägheitsmoment
4. Transformationssatz

Berechung von Integralen

Satz

Ist $f(\mathbf{x})$ stetig auf einem Normalbereich

$$D = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ a \leq x \leq b\ \wedge\ g(x) \leq y \leq h(x)\ \}$$

so gilt

$$\int\limits_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$$

Projizierbare Mengen im $\mathbb{R}^n$

Bemerkung

Analoge Beziehungen gelten für höhere Dimensionen. Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine projizierbare Menge, so gilt

$$\int\limits_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int\limits_B \left(\int\limits_{\varphi(\tilde{\mathbf{x}})}^{\psi(\tilde{\mathbf{x}})} f(\mathbf{x})dx_i \right)\ d\tilde{\mathbf{x}}$$

Berechnung von Integralen II

Beispiel

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) := x + 2y$$

Berechne das Integral über der durch zwei Parabeln begrenzten Fläche

$$D := \{(x, y) \ : \ -1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$$

Berechnung von Integralen III

Beispiel

Die Menge D ist ein Normalbereich und $f(x, y)$ ist stetig:

$$\begin{aligned}
\int_D f(x, y) d\mathbf{x} &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{2-x^2} (x + 2y) dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2\right]_{x^2}^{2-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x(2 - x^2) + (2 - x^2)^2 - x^3 - x^4) dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-2x^3 - 4x^2 + 2x + 4) dx = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

Berechnung von Integralen III

Beispiel

Zu berechnen ist das Volumen des Rotationsparaboloids:

$$V = \{(x,y,z)^T \ : \ x^2+y^2 \leq 1 \wedge x^2+y^2 \leq z \leq 1\}.$$

Darstellung von V als **Normalbereich**

$$V = \{(x,y,z)^T \ : \ |x| \leq 1 \ \wedge \ |y| \leq \sqrt{1-x^2} \ \wedge \ x^2+y^2 \leq z \leq 1\}.$$

Damit gilt:

$$\mathrm{vol}(V) = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{1} dzdydx = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)dydx$$

Berechnung von Integralen IV

Beispiel (Fortsetzung)

Also hat man

$$\mathrm{vol}(V) = \frac{4}{3} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{3/2} dx$$

$$pause = \frac{\pi}{2}.$$

Allgemeine Integrationsbereiche

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte und messbare Menge.Man nennt $Z = \{D_1, \ldots, D_m\}$ eine **allgemeine Zerlegung** von D, falls die Mengen D_k kompakt, messbar und zusammenhängend sind und folgende Bedingungen gelten

$$\bigcup_{j=1}^{m} D_j = D \qquad \text{und} \qquad \forall\, i \neq j \ : \ D_i^0 \cap D_j^0 = \emptyset.$$

Ferner heißt

$$\operatorname{diam} D_j := \sup\{\, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \ : \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \,\}$$

der **Durchmesser** der Menge D_j und

$$\|Z\| := \max\{\, \operatorname{diam} D_j \ : \ j = 1, \ldots, m \,\}$$

die **Feinheit** der allgemeinen Zerlegung Z.

Riemannsche Summe für allgemeine Zerlegungen

Definition

Für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definiert man die Riemannschen Summen

$$R_f(Z) = \sum_{j=1}^{m} f(\mathbf{x}^j)\mathrm{vol}(D_j)$$

mit beliebigen $\mathbf{x}^j \in D_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Riemann Integral und allgemeine Zerlegungen

Satz

Für jede Folge $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ allgemeiner Zerlegungen von D mit $\|Z_k\| \to 0$ $(k \to \infty)$ und für jede Folge zugehöriger Riemannschen Summen $R_f(Z_k)$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} R_f(Z_k) = \int\limits_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Anwendungen auf Berechnung von Schwerpunkten oder Trägsheitsmomenten

A) Schwerpunkt einer Fläche oder eines Körpers:

Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) eine messbare Menge, $\rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$, eine vorgegebene Massendichte. Dann ist der Schwerpunkt der Fläche (bzw. des Körpers) D gegeben durch

$$\mathbf{x}_s := \frac{\int_D \rho(\mathbf{x})\mathbf{x}d\mathbf{x}}{\int_D \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}}$$

Das Zählerintegral (über eine vektorwertige Funktion) ist hierbei koordinatenweise zu berechnen.

Schwerpunkt einer Pyramide

Beispiel

Zu berechnen ist der Schwerpunkt der Pyramide P:

$$P = \left\{ (x, y, z)^T \;:\; \max(|y|, |z|) \leq \frac{ax}{2h}, \quad 0 \leq x \leq h \right\}.$$

Unter der Annahme konstanter Dichte berechnen wir das Volumen von P:

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(P) &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} dz dy dx = \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \frac{ax}{h} dy dx \\
&= \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx = \frac{1}{3} a^2 h
\end{aligned}$$

Schwerpunkt einer Pyramide II

Beispiel (Fortsetzung)

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dz dy dx &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \begin{pmatrix} \frac{ax^2}{h} \\ \frac{axy}{h} \\ 0 \end{pmatrix} dy dx \\
&= \int_0^h \begin{pmatrix} \frac{a^2 x^3}{h^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} a^2 h^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Schwerpunkt einer Pyramide III

Beispiel (Fortsetzung)

Der Schwerpunkt von P liegt daher im Punkt $\mathbf{x}_s = (\frac{3}{4}h, 0, 0)^T$.

Trägheitsmomente von Flächen und Körpern

Definition (Trägheitsmoment bezüglich einer Achse)

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) eine messbare Menge, $\rho(\mathbf{x})$ bezeichne für $\mathbf{x} \in D$ eine Massendichte und $r(\mathbf{x})$ den Abstand des Punktes $\mathbf{x} \in D$ von einer vorgegebenen Drehachse.
Dann besitzt D bezüglich dieser Achse das Trägheitsmoment

$$\Theta_{\text{Achse}} := \int_D \rho(\mathbf{x}) r^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Trägheitsmomente von Flächen und Körpern II

Beispiel

Gegeben sei der homogene Zylinder Z:

$$Z := \left\{ (x, y, z)^T \ : \ x^2 + y^2 \leq r^2, -l/2 \leq z \leq l/2 \right\}$$

Wir berechnen das Trägheitsmoment bezüglich der x–Achse:

$$\Theta_{x\text{–Achse}} = \int_Z \rho(y^2 + z^2) d(x, y, z)$$

unter der Annahme konstanter Dichte ρ.

Trägheitsmomente von Flächen und Körpern III

Beispiel (Fortsetzung)

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Theta_{x\text{–Achse}} &= \rho \int_Z (y^2 + z^2) d(x, y, z) \\
&= \rho \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} \int_{-l/2}^{l/2} (y^2 + z^2) \, dzdydx \\
&= \rho \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} (ly^2 + \frac{l^3}{12}) \, dydx
\end{aligned}$$

Trägheitsmomente von Flächen und Körpern IV

Beispiel (Fortsetzung)

Daher folgt

$$\Theta_{x\text{–Achse}} = \rho\frac{\pi l r^2}{12}(3r^2 + l^2).$$

Transformationssatz

Dies verallgmeinert die Substitutionsregel aus der Analysis II.

Satz

Sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine $\mathcal{C}^1$–Abbildung. $D \subset U$ sei eine kompakte, messbare Menge, so dass Φ auf D^0 einen $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus bildet.
Dann ist auch $\Phi(D)$ kompakt und messbar, und für jede stetige Funktion $f : \Phi(D) \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int\limits_{\Phi(D)} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int\limits_{D} f(\Phi(\mathbf{u}))\left|det\,\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u})\right| d\mathbf{u}$$

Transformationssatz II

Bemerkung

Man beachte, dass im Transformationssatz die Bijektivität von Φ nur auf dem inneren Bereich D^0 gefordert wird – nicht jedoch auf dem Rand!

Schwerpunkt

Beispiel

Berechne den Schwerpunkt eines homogenen Kugeloktanten:

$$V = \{(x, y, z,)^T \; : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x, y, z \geq 0\}$$

Hier ist es einfacher den Schwerpunkt in Kugelkoordinaten zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \cos\psi \\ r \sin\varphi \cos\psi \\ r \sin\psi \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \psi)$$

Schwerpunkt II

Beispiel (Fortsetzung)

Die Transformation ist auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert und mit

$$D = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

gilt $\Phi(D) = V$. Weiter ist Φ auf der offenen Menge D^0 ein $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus und

$$\det \mathbf{J}\Phi(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos \varphi.$$

Schwerpunkt III

Beispiel (Fortsetzung)

Nach dem Transformationssatz folgt

$$\text{vol}\,(V) = \int\limits_V d\mathbf{x} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr = \frac{\pi}{6}$$

und

$$\text{vol}\,(V) \cdot x_s \quad = \quad \int\limits_V x d\mathbf{x} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} (r \cos \varphi \cos \psi) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr$$

Schwerpunkt IV

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}\,(V)\cdot x_s &= \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2\psi d\psi \\ &= \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

Daraus folgt $x_s = \frac{3}{8}$.
Analog berechnet man $y_s = z_s = \frac{3}{8}$.

Trägheitsmomente

Beispiel (Der Steinersche Satz)

Für das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers K mit Gesamtmasse m gilt bezüglich einer vorgegebenen Drehachse A

$$\Theta_A = md^2 + \Theta_S$$

Hierbei ist S die zu A parallele Achse durch den Schwerpunkt $\mathbf{x}_s$ des Körpers K und d der Abstand des Schwerpunktes $\mathbf{x}_s$ von der Achse A.

Trägheitsmomente

Beispiel (Der Steinersche Satz – Herleitung)

Idee zur Herleitung: Setze $\mathbf{x} := \Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{x}_s + \mathbf{u}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\Theta_A &= \rho \int\limits_K (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle^2) d\mathbf{x} \\ &= \rho \int\limits_D (\langle \mathbf{x}_s + \mathbf{u}, \mathbf{x}_s + \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{x}_s + \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle^2) d\mathbf{x}\end{aligned}$$

wobei

$$D := \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_s \ : \ \mathbf{x} \in K\}$$

Ende 10. Vorlesung