Analysis I für
Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2004/2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (WS 2001/02)

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt

$$\left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \left| \frac{z^{k+1}\, k!}{z^k\, (k+1)!} \right| = \frac{|z|}{k+1} \quad \to \quad 0 \quad (k \to \infty)$$

Damit konvergiert die Reihe (absolut).

Setze für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Umordnungssatz für Reihen

Sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine beliebige Bijektion (Permutation) auf $\mathbb{N}_0$

$$\text{Vergleiche } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{mit} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} \qquad (\sigma_k = \sigma(k))$$

Beispiel (alternierende harmonische Reihe)

Satz:

1) Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist auch jede umgeordnete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ absolut konvergent und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$

2) Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ für jede Permutation $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ konvergent, so ist die Ausgangsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Produkt von Reihen

Ausmultiplizieren von Reihen möglich?

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) \stackrel{?}{=} \sum_{k=l=0}^{\infty} a_k b_l$$

Rechte Seite: jedes Indexpaar $(k, l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ tritt genau einmal auf

Satz: Die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{l=0}^{\infty} b_l$ seien absolut konvergent.

Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k}$ für jede Numerierung der Indexpaare $(\sigma, \mu) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^2$ (Bijektion) absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right)$$

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}$ gilt für hinreichend großes N
$\sum_{k=0}^{m} |a_{\sigma_k} b_{\mu_k}| \leq \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} |a_k|\,|b_l| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l| \right)$. Also ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k}$ absolut konvergent, ihr Grenzwert ist nach dem Umordnungssatz unabhängig von der Permutation (σ, μ). Zur Berechnung des Grenzwertes wählt man eine spezielle Reihenfolge

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & (\sigma_k) \\
\hline
0 & 0 & 3 & 8 & 15 & \dots & \\
1 & 1 & 2 & 7 & 14 & \dots & \\
2 & 4 & 5 & 6 & 13 & \dots & \\
3 & 9 & 10 & 11 & 12 & \dots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
(\mu_k) & & & & & &
\end{array}
$$

Spezielle Reihenfolge:

	0	1	2	3	$\ldots$	(σ_k)
0	0	3	8	15	$\ldots$	
1	1	2	7	14	$\ldots$	
2	4	5	6	13	$\ldots$	
3	9	10	11	12	$\ldots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
(μ_k)						

Für $m = (n+1)^2 - 1$ ergibt sich dann

$\displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_{\sigma_k} b_{\mu_k} = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)(b_0 + b_1 + \ldots + b_n)$ und daher

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_{\sigma_k} b_{\mu_k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right)$$

Weiterer Spezialfall: Numerierung entlang der Diagonalen

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & (\sigma_k) \\
\hline
0 & 0 & 2 & 5 & 9 & \dots & \dots \\
1 & 1 & 4 & 8 & 13 & \dots & \\
2 & 3 & 7 & 12 & 18 & \dots & \\
3 & 6 & 11 & 17 & 24 & \dots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
(\mu_k) & & & & & &
\end{array}
$$

Man erhält damit das **Cauchy–Produkt der Reihen**:

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) \\
&= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \dots
\end{aligned}
$$

Anwendung zum Cauchy–Produkt: Für die durch

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (z \in \mathbb{Z})$$

definierte **Exponentialfunktion** gilt die **Funktionalgleichung**
$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.

Begründung: Die obige Reihe ist absolut konvergent. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w)
\end{aligned}$$

Kapitel 4: Stetigkeit und Differenzierbarkeit

4.1 Stetigkeit, Grenzwerte von Funktionen

V und W normierte Vektorräume, $f : D \to W$, $D \subset V$ eine Funktion.

Definition:

1) Ein Punkt $x_0 \in V$ heißt **Häufungspunkt von** D, falls eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad : \quad x_n \in D, \;\; x_n \neq x_0, \;\; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

   Wichtige Notationen:
   D' = Menge aller Häufungspunkte von D
   $\overline{D} = D \cup D'$ abgeschlossene Hülle (topologische Abschluss) von D

2) Die Menge D heißt **abgeschlossen**, falls $D' \subset D$, also $\overline{D} = D$ gilt

Definition: (Fortsetzung)

3) Zu $x_0 \in V$ und $\varepsilon > 0$ bezeichne

$$K_\varepsilon(x_0) := \{x \in V \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

die (offene) Kugel um x_0 **mit Radius** ε

4) Die Menge D heißt **beschränkt**, falls es ein $\varepsilon > 0$ und ein $x_0 \in V$ gibt mit $D \subset K_\varepsilon(x_0)$

5) Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt **innerer Punkt von** D, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $K_\varepsilon(x_0) \subset D$.

   Notationen:

   $D^0 (= \text{int}(D))$ = **Menge aller inneren Punkte von** D
   = **(offene) Kern von** D = **Innere von** D

6) Die Menge D heißt **offen**, falls $D^0 = D$ gilt

Beispiele:

1) $D = (0,1) \subset \mathbb{R}$ ist offen mit $D' = [0,1]$, $D = [0,\infty) \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen

2) Sei $D = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (2,\infty) \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} D' &= (-\infty, 0] \cup [2,\infty) \\ \overline{D} &= (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2,\infty) \\ D^0 &= (-\infty, 0) \cup (2,\infty) \end{aligned}$$

3) $D = K_\varepsilon(x_0) \subset V$ ist offen
$D' = \{x \mid \|x - x_0\| \le \varepsilon\} =: \overline{K}_\varepsilon(x_0)$ ist die abgeschlossene Kugel

4) Innere Punkte $x_0 \in D^0$ sind immer Häufungspunkte von D, da

$$x_0 + \frac{\varepsilon}{n+1}\frac{z}{\|z\|} \quad \to \quad x_0, \qquad n \to \infty,\ z \in V,\ z \neq 0$$

Definition: Gegeben sei $f : D \to W$, $D \subset V$ und ein $x_0 \in D'$

1) $f(x)$ **konvergiert für** $x \to x_0$ **gegen den Grenzwert** y_0, falls für **jede** Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

Notation: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$

2) Im Fall $D = \mathbb{R}$ lassen sich **einseitige** Grenzwerte definieren:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;:\; x_n \in D,\; x_n < x_0 :$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;:\; x_n \in D,\; x_n > x_0 :$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

Beispiel 1: Betrachte die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \ \wedge \ x = 1 \\ 1 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \to 0$ existiert der Grenzwert der Funktion nicht! Weiter gilt

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \neq f(1)$$

Notation: Sprungfunktion

Beispiel 2: Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ existiert weder der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ noch $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

Beispiel 3: Für die Funktion $f(x) = 1/x$ existieren die beiden einseitigen **uneigentlichen** Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Bemerkung: Grenzwertsätze für Folgen gelten auch bei Grenzwerten von Funktionen, d.h.

1) Für den Grenzwert einer Summe gilt:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

2) Für den Grenzwert eines Produkts mit λ gilt:

$$\lim_{x \to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

3) Ist der Wertebereich W gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so gilt für Produkte:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \Big(\lim_{x \to x_0} f(x) \Big) \cdot \Big(\lim_{x \to x_0} f(x) \Big)$$

Entsprechend gilt für vektorwertige Funktionen in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$:

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \Big(\lim_{x \to x_0} f_1(x), \ldots, \lim_{x \to x_0} f_n(x) \Big)$$

Definition: (Stetige Funktionen) Sei $f : D \to W, D \subset V$

1) Die Funktion $f(x)$ heißt **stetig ergänzbar** in $x_0 \in D'$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert (und endlich ist).

2) Die Funktion $f(x)$ heißt **stetig in** $x_0 \in D \cap D'$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

3) Die Funktion $f(x)$ heißt **stetig**, falls $f(x)$ in **allen** Punkten $x_0 \in D \cap D'$ stetig ist.

Satz: (ε–δ–Definition)

Für $x_0 \in D \cap D'$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

1) $f(x)$ ist stetig in x_0, d.h. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, x \in D \;:$

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Beweis:

1) $\Rightarrow$ 2): **Annahme:** $\exists\, \varepsilon > 0\ :\ \forall\, \delta > 0\ :\ \exists\, x_\delta \in D\ :$

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \quad \wedge \quad \|f(x_\delta) - f(x_0)\| \geq \varepsilon.$$

Die Wahl $\delta = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ generiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in D$ mit

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Wegen $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$ gilt

$$x_n \neq x_0 \quad \Rightarrow \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Gleichzeitig konvergiert aber $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0)$ $\quad\Rightarrow$

Widerspruch dazu, dass $f(x)$ im Punkt x_0 stetig ist.

Beweis: (Fortsetzung)

2) $\Rightarrow$ 1): Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählt man ein $\delta > 0$ mit

$$\forall\, x \in D \;:\; \|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Sei nun $N = N(\varepsilon)$ mit

$$\forall\, n \geq N \;:\; \|x_n - x_0\| < \delta$$

Dann folgt direkt

$$\forall\, n \geq N \;:\; \|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

also

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Damit ist die Funktion $f(x)$ stetig im Punkt x_0.