1.3 Funktionen

Seien M und N Mengen

$$f : M \to N \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in M \;:\; \exists_1\, y \in N \;:\; y = f(x)$$

nennt man **Funktion** oder Abbildung.

Beachte: Zuordnung ist eindeutig.

Bezeichnungen:

M	:	Definitionsbereich
N	:	Bildbereich (Zielmenge) von f

Der Graph einer Funktion:

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \,|\, x \in M\} \subset M \times N$$

Sei $A \subset M$: das **Bild** von A unter der Funktion f ist gegeben durch

$$f(A) := \{f(a) \,|\, a \in A\}$$

Für $B \subset N$ nennt man

$$f^{-1}(B) := \{a \in M \,|\, f(a) \in B\}$$

das **Urbild** von B unter der Funktion f.

Eine Funktion f ist

surjektiv, falls $f(x) = y$ stets wenigstens eine Lösung hat, d.h.

$$\forall\, y \in N \;\exists\, x \in M \;:\; y = f(x)$$

injektiv, falls $f(x) = y$ stets höchstens eine Lösung hat, d.h.

$$\forall\, x_1, x_2 \in M \;:\; (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Eine Funktion f ist

bijektiv, falls f gleichzeitig injektiv und surjektiv ist

Injektive Funktionen besitzen eine **Umkehrfunktion**

$$f^{-1} : f(M) \to M : f^{-1}(f(x)) = x$$

Ist f bijektiv so gilt

$$M \xrightarrow{f} N \quad N \xrightarrow{f^{-1}} M$$

Bemerkung:

Die Umkehrfunktion einer reellwertigen Funktion einer reellen Variablen erhält man durch Spiegelung an der Diagonalen

Komposition von Funktionen:
Sei $f : M \to N$ und $g : N \to P$. Definiere

$$g \circ f : M \to P, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Eigenschaften der Komposition:

a) assoziativ

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

b) in der Regel **nicht** kommutativ

$$g \circ f \neq f \circ g$$

c) Sei M eine Menge, setze

$$\mathrm{S}(M) := \{f : M \to M \mid f \text{ bijektiv}\}.$$

Man nennt $\mathrm{S}(M)$ **symmetrische Gruppe** von M

Die **symmetrische Gruppe** von M

Gruppenaxiome

G1)	$h \circ (g \circ f)$	$=$	$(h \circ g) \circ f$	(Assoziativgesetz)
G2)	$f \circ id_M$	$=$	$id_M \circ f = f$	(neutrales Element)
G3)	$f \circ f^{-1}$	$=$	$f^{-1} \circ f = id_M$	(inverses Element)

Dabei ist id_M die Identität (als Funktion), d.h.

$$id_M(x) = x$$

und f^{-1} die Umkehrfunktion von f.

Elementare Funktionen:

a) Affin–lineare Funktion

$$y = f(x) = a_1 x + a_0$$

Der Graph ist eine Gerade in der euklidischen Ebene

b) Polynome

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

Dabei bezeichnet n den Grad des Polynoms

c) Exponentialfunktion

$$y = f(x) = a^x$$

Für die Exponentialfunktion gilt

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

c) Exponentialfunktion (Fortsetzung)

Speziell: Exponentialfunktion $y = e^x$, zum Beispiel definiert durch

$$f'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2.7182\,81828\,\ldots$$

(Eulersche Zahl)

d) Logarithmus

$$y = f(x) = \log_a x, \quad a > 0,\ a \neq 1$$

Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ($\Rightarrow$ nur definiert für positive x)

Für den Logarithmus gilt

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Speziell: natürlicher Logarithmus $y = \ln x$ (Basis e) mit

$$\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1$$

e) Trigonometrische Funktionen

Bogenmaß: $0^\circ = \varphi = 0,\ 45^\circ = \varphi = \frac{\pi}{4},\ 90^\circ = \varphi = \frac{\pi}{2}$

Kreiszahl $\pi = 3.1415\,92563\ \ldots$

Bild: Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

Eigenschaften:

Es gelten:

(i) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

(ii) $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi), \quad \cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$

(iii) $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi), \quad \sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi)$

(iv) Wertetafel:

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\varphi$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\varphi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

(v) Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Kapitel 2: Zahlenbereiche

2.1 Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

wird **abstrakt** durch die **Peano–Axiome** definiert:

(A1) $1 \in \mathbb{N}$

(A2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N}$

(A3) $n \neq m \Rightarrow (n+1) \neq (m+1)$

(A4) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \neq 1$

(A5) für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ gilt :
$1 \in A \wedge (\forall n : [n \in A \Rightarrow (n+1) \in A]) \Rightarrow A = \mathbb{N}$

Die **Nachfolgeabbildung** $n \mapsto (n+1)$ ist eine injektive Abbildung.

Das **Vollständigkeitsaxiom** (A5) ist Grundlage des

Beweisprinzips der vollständigen Induktion

Zu beweisen sei:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: die Aussage $A(n)$ ist wahr, also

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ : \ A(n)$$

Dabei ist $A(n)$ eine Aussageform, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt.

Gelten nun

$$A(1) \qquad \textbf{(Induktionsanfang)}$$

und für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) \Rightarrow A(n+1) \qquad \textbf{(Induktionsschluss)}$$

so ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Wichtig:

Induktionsschluss muss für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden

Man nennt daher

$A(n)$ die **Induktionsannahme**

$A(n+1)$ die **Induktionsbehauptung**

Beispiel: Anzahl t_n der Teilmengen einer n–elementigen Menge

Finde eine Formel für t_n, die für *kleine* $n \in \mathbb{N}$ gilt:

für $n = 1$ $A_1 = \{a_1\}$

Teilmengen: $\emptyset, \{a_1\}$

es gibt $t_1 = 2$ Teilmengen

für $n = 2$ $A_2 = \{a_1, a_2\}$

Teilmengen: $\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$

es gibt $t_2 = 4$ Teilmengen

Es gilt: $t_1 = 2 = 2^1, \quad t_2 = 4 = 2^2$

Vermutung: Allgemein gilt

$$t_n = 2^n$$

d.h. eine n–elementige Menge besitzt genau 2^n Teilmengen.

Satz: Eine n–elementige Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ besitzt 2^n Teilmengen

Beweis: (durch vollständige Induktion)

$n = 1$: Wie gezeigt, gilt $t_1 = 2$

$n \to n + 1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.

Induktionsvoraussetzung: Eine n–elementige Menge hat 2^n Teilmengen

Zu beweisen ist: $A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ hat 2^{n+1} Teilmengen.

Setze $\mathcal{P}(A) = K_1 \cup K_2$ mit

$$T \in K_1 \;:\Leftrightarrow\; a_{n+1} \notin T$$

$$T \in K_2 \;:\Leftrightarrow\; a_{n+1} \in T$$

Nach Induktionsvoraussetzung besitzt K_1 genau 2^n Elemente, denn die Elemente aus K_1 sind gerade die Teilmengen von $A' = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Jedes Element aus K_2 hat die Form

$$T = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, a_{n+1}\}$$

wobei

$$\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} \in K_1$$

Also besitzt die Menge K_2 wieder nach Induktionsvoraussetzung ebenfalls 2^n Elemente.

Nach Konstruktion gilt

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset.$$

Daraus folgt aber, dass $\mathcal{P}(A)$ genau $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Elemente besitzt.

Beispiel: Wieviele Vertauschungen (Permutationen) des n–Tupels $(1, 2, \ldots, n)$ gibt es?

Suche wiederum eine Formel für kleine $n \in \mathbb{N}$:

$n = 1$:	(1)	:	1 Permutation
$n = 2$:	(1,2), (2,1)	:	2 Permutationen
$n = 3$:	(1,2,3), (1,3,2) (2,3,1), (2,1,3) (3,1,2), (3,2,1)	:	6 Permutationen

Es gilt: $p_1 = 1, \quad p_2 = 2 = 1 \cdot 2, p_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$

Vermutung: Allgemein gilt

$$p_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

d.h. ein n–Tupel besitzt genau $n!$ Permutationen.

Satz: Es gibt $p_n := n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ Permutationen des n–Tupels $(1, 2, \ldots, n)$ (bzw. $(a_1, \ldots, a_n)$, a_i paarweise verschieden)

Beweis: (durch vollständige Induktion)

$n = 1$: Wie gezeigt, gilt $p_1 = 1$

$n \to n + 1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest

Induktionsvoraussetzung: Ein n–Tupel besitzt $n!$ Permutationen

Zu beweisen ist: Das $(n + 1)$–Tupel besitzt $(n + 1)!$ Permutationen

Betrachte spezielle Permutation

$$(k, i_1, \ldots, i_n)$$

wobei $(i_1, \ldots, i_n)$ Permutation der Menge $(1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n+1)$.
$\Rightarrow$ $n + 1$ paarweise disjunkte Klassen von Permutationen $\Rightarrow$

$$p_{n+1} = (n + 1) \cdot p_n = (n + 1)!$$

Folgerung:

Eine n–elementige Menge $\{a_1, \ldots, a_n\}$ besitzt genau

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

m–elementige Teilmengen. Dies gilt für alle ganzen Zahlen $0 \leq m \leq n$, wobei zusätzlich $0! := 1$ gesetzt wird.

Beweis: Vollständige Induktion unter Verwendung des nächsten Satzes

Bezeichnung:

Die natürlichen Zahlen $\binom{n}{m}$ nennt man **Binomialkoeffizienten**.

Definition:

Allgemeine Summen und Produkte

$$\sum_{k=m}^{n} b_k \;:=\; b_m + b_{m+1} + \ldots + b_n \quad \text{(falls } m \leq n\text{)}$$

$$\sum_{k=m}^{n} b_k \;:=\; 0 \quad \text{(falls } m > n\text{, leere Summe)}$$

$$\prod_{k=m}^{n} b_k \;:=\; b_m \cdot b_{m+1} \cdot \ldots \cdot b_n \quad \text{(falls } m \leq n\text{)}$$

$$\prod_{k=m}^{n} b_k \;:=\; 1 \quad \text{(falls } m > n\text{, leeres Produkt)}$$

Definition:

Potenzen

$$a^n := \prod_{k=1}^{n} a \quad \text{für } n \geq 0$$

$$a^n := 1/(a^{-n}) \quad \text{für } n < 0$$

Dann gelten die Potenzgesetze:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Satz:

a) Für $n, m \in \mathbb{N}$, $0 < m \leq n$, gilt die Rekursionsformel:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$$

b) Für reelle (und auch komplexe) a,b und $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt der

Binomische Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

Beweis zu a): $(n, m \in \mathbb{N}, 0 < m \leq n)$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} &= \frac{n!}{m!\,(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!} \\
&= \frac{n!\,(n-m+1) + n!\,m}{m!\,(n+1-m)!} \\
&= \frac{n!\,(n+1-m+m)}{m!\,(n+1-m)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{m!\,(n+1-m)!} \\
&= \binom{n+1}{m}
\end{aligned}$$

Beweis zu b): (vollständige Induktion)

$n = 1$:

$$(a+b)^1 = a + b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} a^0 b^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a^1 b^0$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \overset{\text{Ind.vor.}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n+1-k} \\
&\overset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ j-1 \end{pmatrix} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{j=k+1}{=} && \sum_{j=1}^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ j-1 \end{pmatrix} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n+1-k} \\
&= && \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} \right] a^k b^{n+1-k} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} a^{n+1} b \\
&= && \begin{pmatrix} n+1 \\ 0 \end{pmatrix} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n+1-k} + \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} a^{n+1} b^0 \\
&= && \sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}
$$

denn

$$
\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} = 1
$$

Berechnung der Binomialkoeffizienten mit Hilfe des

Pascalsches Dreieck

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Beispiel: Binomischer Lehrsatz

$$
\begin{aligned}
(a+b)^5 &= 1 \cdot a^0 b^5 + 5 \cdot a^1 b^4 + 10 \cdot a^2 b^3 + 10 \cdot a^3 b^2 + 5 \cdot a^4 b^1 + 1 \cdot a^5 b^0 \\
&= a^5 + 5a^4 b + 10a^2 b^3 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}
$$