

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2004/2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (WS 2001/02)

5.2 Die Regeln von de l'Hospital

Wie berechnet man den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

falls gilt:

- 1) Beide Funktionen konvergieren gegen Null, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

- 2) Beide Funktionen divergieren gegen Unendlich, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

Beispiel: Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

Satz: (Regel von de l'Hospital für $\frac{0}{0}$)

Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und es gelte $g(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$.

Dann folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der rechts stehende Grenzwert existiert.

Beweis:

Mit Hilfe des zweiten Mittelwertsatzes:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

wobei ξ ein Punkt zwischen x und x_0 ist.

Konvergiert nun x gegen x_0 , so konvergiert auch ξ gegen x_0 .

Regel von de l'Hospital gilt wie angegebenen für:

1) Wir betrachten einseitige Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2) Rechte Seite divergiert gegen \pm -Unendlich, d.h. gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$$

so lautet die Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$$

3) Wir betrachten uneigentliche Grenzwerte der Form:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Satz: (Regel von de l'Hospital für $\frac{\infty}{\infty}$)

Seien $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ($x_0 \in (a, b)$).

Ferner gelte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

und $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$.

Dann folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der rechts stehende Grenzwert existiert.

Beispiele:

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = 2$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2}$$

5.3 Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich, Wertebereich
2. Symmetrien
3. Pole
4. Verhalten im Unendlichen
5. Nullstellenbestimmung
6. Bestimmung der Extrema
7. Wendepunkte
8. Skizze

Erklärungen:

- 1) Eine Funktion ist **symmetrisch zur y -Achse** (gerade Funktion), falls für alle x gilt: $f(-x) = f(x)$.
- 2) Eine Funktion ist **symmetrisch zum Ursprung** (ungerade Funktion), falls für alle x gilt: $f(-x) = -f(x)$.
- 3) Eine Funktion $f(x)$ besitzt in x_0 einen **Pol**, falls gilt

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x - x_0)^k}$$

wobei $g(x)$ stetig in x_0 ist und $g(x_0) \neq 0$.

Ist k ungerade, so ist der Pol ein **Pol mit Vorzeichenwechsel**. Ist k gerade, so ist der Pol ein **Pol ohne Vorzeichenwechsel**.

- 4) Eine Gerade $y = \alpha x + \beta$ heißt **Asymptote** von $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$, falls gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$$

5) Die Koeffizienten einer Asymptoten ergeben sich durch

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \alpha x)$$

Beispiel: Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}$$