# Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2004/2005
Basierend auf der Vorlesung von
Jens Struckmeier (WS 2001/02)

**Beispiel:** Taylor–Entwicklung der Exponentialfunktion

Betrachte die Exponentialfunktion $f(x) := \exp(x)$. Zunächst gilt:

$$\Big(\exp(x)\Big)' = \exp(x)$$

Daher gilt nach der Taylor–Entwicklung mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x;0)$$

Das Restglied lautet:

$$R_n(x;0) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

Fehlerabschätzung für $0 \leq x \leq 1$:

$$|R_n(x;x_0)| = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Zum Beispiel: $|R_{10}(x;x_0)| \leq 6.81 \cdot 10^{-8}$.

**Beispiel:** Taylor–Entwicklung der Sinusfunktion

Betrachte die Sinusfunktion $f(x) := \sin x$. Zunächst gilt:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

Daher gilt nach der Taylor–Entwicklung mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x;0)$$

Das Restglied lautet:

$$R_n(x;0) = (-1)^{n+1}\frac{\cos\xi}{(2n+3)!}x^{2n+3}, \quad \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1$$

Für $x \in [-\pi/6, \pi/6]$, $x \neq 0$ und $n = 3$ ergibt sich folgende Abschätzung für den **relativen Fehler**:

$$\left|\frac{R_8(x;0)}{\sin x}\right| \leq \left|\frac{\pi R_8(x;0)}{3|x|}\right| \leq \frac{1}{9!}\frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^8 = 1.63\cdot 10^{-8}.$$

**Bemerkung:**

Die Taylor–Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

einer $C^\infty$–Funktion ist im Allgemeinen

**nicht konvergent.**

Konvergiert die Reihe, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.

Gilt aber

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

so nennt man die Funktion $f$ **reell analytisch** oder eine $C^\omega$–Funktion.

## Folgerungen aus der Taylor–Formel:

a) **Satz:** Gilt für eine $C^{n+1}$–Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\forall\, x \in [a,b] \quad : \quad f^{(n+1)}(x) = 0$$

so ist $f(x)$ ein Polynom höchstens $n$–ten Grades.
**Begründung:**
Das Restglied $R_n(x; x_0)$ nach Lagrange verschwindet identisch.

b) **Satz:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine $C^2$–Funktion und $x^* \in (a,b)$ eine einfache Nullstelle dieser Funktion. Dann ist das Newton–Verfahren mit Startwerten in der Nähe von $x^*$ **quadratisch konvergent**.

**Begründung:** Aus der Taylor–Entwicklung zweiter Ordnung folgt:

$$(x_{n+1} - x^*) = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\,(x_n - x^*)^2 \qquad \xi_n \in \begin{cases} (x_n, x^*) \\ (x^*, x_n) \end{cases}$$

Interpretation der ersten Folgerung:
Wir betrachten die **gewöhnliche Differentialgleichung** $y^{(n+1)} = 0$. Dann ergibt sich als Lösungsraum genau der Raum der Polynome vom Grad höchstens $n$. Schon hier können wir feststellen, dass eindeutige Lösbarkeit nur durch zusätzliche Forderungen an die Lösung erzielt werden kann. Dieses Thema wird uns noch ausführlich beschäftigen.

c) **Taylor–Formel für Polynome:**

Ist die Funktion $f(x)$ selbst ein Polynom vom Grad $n$, also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad (a_n \neq 0)$$

so ist das Taylor–Polynom $n$–ten Grades zu einem beliebigen Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

und identisch mit $f(x)$, d.h.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Damit ist $p(x)$ nur eine Umordnung bezüglich des Punktes $x_0$.

d) **Satz: (Kriterien für lokale Extrema II)**

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $C^2$–Funktion, so gilt für $x_0 \in (a, b)$:

1) $f'(x_0) = 0 \ \wedge \ f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ hat in $x_0$ ein strenges lokales Minimum.

2) $f'(x_0) = 0 \ \wedge \ f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ hat in $x_0$ ein strenges lokales Maximum.

**Problem:** Was passiert im Fall $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$?

Hier gibt es zwei Möglichkeiten

1) Der stationäre Punkt ist tatsächlich ein **strenges lokales Minimum oder Maximum**.

2) Der stationäre Punkt ist ein **Wendepunkt**.

**Frage:** Wann gilt 1) oder 2)?

1) Der stationäre Punkt ist tatsächlich ein **strenges lokales Minimum oder Maximum**, wenn gilt:

   Ist $f$ eine $C^{2n}$–Funktion ($n \in \mathbb{N}$) und gilt:

$$\forall\, k = 1, 2, \ldots, 2n-1 \quad : \quad f^{(k)}(x_0) = 0$$

   so ist $x_0$ ein strenges lokales Minimum bzw. Maximum, falls

$$f^{(2n)}(x_0) > 0 \quad \text{bzw.} \quad f^{(2n)}(x_0) < 0$$

**Beispiel:** Betrachte die Funktion $f(x) = x^5 - x^4$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 4x^3 \quad f''(x) = 20x^3 - 12x^2 \\ f^{(3)}(x) &= 60x^2 - 24x \quad f^{(4)}(x) = 120x - 24 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0 \quad f^{(3)}(0) = 0 \quad f^{(4)}(0) = -24$$

## 2) Wendepunkt = Links–Rechtskurve oder Rechts–Linkskurve

## Konvexität

**Definition:** Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **konvex** (oder eine **Linkskurve**), falls für alle $x_1 < x < x_2$ in $[a, b]$ gilt:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Die Funktion $f(x)$ heißt **konkav** (oder eine **Rechtskurve**), falls für alle $x_1 < x < x_2$ in $[a, b]$ gilt:

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Gelten jeweils die Ungleichungen mit $<$ bzw. $>$, so nennt man die Funktionen **streng konvex** bzw. **streng konkav**.

**Satz:** Sei $f(x)$ eine $C^2$–Funktion auf $[a, b]$. Dann gilt:

$$\forall\, x \in (a, b) \ : \ f''(x) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \text{ streng konvex}$$

$$\forall\, x \in (a, b) \ : \ f''(x) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \text{ streng konkav}$$

**Bemerkung:** Der Graph einer konvexen, differenzierbaren Funktion liegt stets oberhalb seiner Tangenten.

**Definition:** Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sagt man:

$f(x)$ hat in $x_0 \in (a, b)$ einen **Wendepunkt**, falls

1) $f(x)$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex und in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konkav ist **(Links–Rechtskurve)**

**oder**

2) $f(x)$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konkav und in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konvex ist **(Rechts–Linkskurve)**

**Satz: (Kriterien für Wendepunkte)**

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $C^3$–Funktion

1) Ist $x_0 \in (a, b)$ ein Wendepunkt, so gilt: $f''(x_0) = 0$

2) Gilt für $x_0 \in (a, b)$: $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, so ist $x_0$ ein **Wendepunkt** und $f(x)$ ist bei $x_0$ eine **Rechts–Linkskurve**.

   Gilt für $x_0 \in (a, b)$: $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) < 0$, so ist $x_0$ ein **Wendepunkt** und $f(x)$ ist bei $x_0$ eine **Links–Rechtskurve**.

**Beispiel:** Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^4 - x^3$:

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 \qquad f''(x) = 12x^2 - 6x \qquad f'''(x) = 24x - 6$$

Im Punkt $x_0 = 0$: $\qquad f'(0) = 0 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = -6$

$\Rightarrow$ Die Funktion hat in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt (Links–Rechtskurve)

Lokales Minimum bei $x_1 = 3/4$: $\qquad f'(3/4) = 0 \qquad f''(3/4) = 9/4$